ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ФАЗА И ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ЛУЧЕВЫЕ ВИХРИ В МНОГОМОДОВОМ ВОЛОКНЕ *)

А.В.Воляр, доктор физико-математических наук, профессор, академик Нью-Йоркской АН, В.И.Мягков, кандидат физико-математических наук, доцент, Т.А.Фадеева

1. Введение

Медленное изменение параметров по циклическому закону приводит к появлению экспоненциального множителя Ψ - функции:

$$\Psi(x_i,\ \lambda_i,\ t) \rightarrow \Psi(x_i,\ \lambda_i + 2\pi,\ t)\ \exp\{\pm i\,\Omega\} \qquad (1)$$

Этот вывод, полученный Берри М. [15], а несколько раньше Дираком П. в работе о магнитном монополе [8], недавно иашел широкий отклик среди научной общественности [4,17] и стимулировал разработки фундаментальных разделов физики, касающихся поляризационно-лучевых вихрей [6,9]. Исследования вращения плоскости лучевой траектории света (оптический эффект Магнуса, согласно работе [9], или распространения поляризационно-лучевых вихрей - в соответствии с работой [6]) в конечном итоге показали единую физическую природу двух топологических эффектов: фазы Берри и поляризационно-лучевого вихря. Однако, трактовка этого явления вызвала серьезную дискуссию. В самом деле, согласно работе [16] взаимосвязь топологической фазы Берри локальной волны [12] и поляризационно-лучевого вихря Зельдовичем Б.Я. трактуется как спин-орбитальное взаимодействие фотона в неоднородной среде. Однако, согласно основным принципам квантовой электродинамики, разделение квантовых угловых моментов на орбитальный и собственный для бозонов лишено физического смысла [1,2]. Другой подход, связанный с топологической природой этих явлений, [7] с нашей точки зрения является более продуктивным.

Целью данной работы явилась попытка записать самосогласованную систему уравнений, решения которой отражают взаимосвязь топологической фазы Берри и поляризационно-лучевых вихрей.

2. Самосогласованная система уравнений

Рассмотрим некоторую немагнитную оптически прозрачную локально-изотропную среду, характеризующуюся распределением показателя преломления $n(x,\ y,\ z)$. В общем случае в такой среде лучевая траектория локальной волны не является плоской кривой с координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. В пространстве импульсов $\{P_x,\ P_y,\ P_z\}$ единичный вектор, касательный к кривой (1) и установленный в начало координат, опишет некоторую фазовую траекторию $dx(t)/dt$, $dy(t)/dt$, $dz(t)/dt$. Если эта кривая циклически изменяется, то в соответствии с [4] осуществим параллельный перенос линейно поляризованного вектора электрического поля E по замкнутому контуру. Сравнение начального значения вектора E_t с конечным E_{t+T} дает рассогласование в ориентации этих линейно поляризованных векторов, равное γ. Согласно Берри [15], это угловое рассогласование и есть топологическая фаза Ω. Обозначим через U единичный электрический вектор волны и запишем для него уравнение параллельного переноса [10]:,

$$dU^{\alpha}/dt = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}U^{\beta}\left(dx^{\gamma}/dt\right) \qquad (2)$$

где $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ - символ Кронекера второго рода.

Решение уравнения (2) $U^\alpha(T)$ совместно с начальным условием $U^\alpha(0)$ определит фазу Берри Ω. Поскольку фаза $\Omega(x^\alpha)$ зависит от пути интегрирования, то она называется неинтегрируемой и неголономной фазой. Решение уравнения (2) можно найти только в том случае, если известна траектория локальной волны $x^\alpha(t)$. Эта траектория при известном распределении $n(x, y, z)$ может быть найдена из уравнения Эйконала [3]. Однако уравнение Эйконала не учитывает вихревого характера траектории, зависящей от начального или текущего состояния поляризации $U^\alpha(t)$ [6]. В этом смысле уравнение (2) не замкнуто и имеет бесконечное множество решений. Для определения единственности решения (2) необходимо записать второе уравнение, учитывающее поляризационно-лучевой вихрь. Обратимся к вариационному уравнению [13]:

$\delta\left\{\int dS\right\} = 0$ (3) , $dS^2 = g_{\mu\nu}dx_\nu dx_\mu$ (4) где $g_{\mu\nu}$ - метрический тензор, dS - пространственно-временной интервал. Для фотонов уравнение (3) может быть сведено к принципу Ферма ,

$$\delta\left\{\int n(x, y, z)d\ell\right\} = 0 \qquad (5)$$

где $d\ell$ - элемент дуги лучевой траектории. Однако уравнение (5) определяет "скалярную" лучевую траекторию без учета поляризационного вихря.

Введем волновой вектор локальной волны

$$\beta = 2\pi/\lambda_0\, n(x, y, z)k_0, \qquad (6)$$

λ_0 - длина волны в вакууме, k_0 - единичный вектор волнового фронта локальной волны. Исходя из уравнения (5) постулируем, что для локальной волны с волновым вектором β верно вариационное уравнение:

$$\delta\left\{\int \beta_\alpha dx^\alpha\right\} = 0. \qquad (7)$$

Его можно представить в виде

$$\delta\left\{\int k_z dZ + g_\nu dx^\nu\right\} = 0. \qquad (8)$$

Первый член уравнения (8) соответствует "скалярной" части траектории и совпадает в параксиальном приближении $d\ell \approx dz_c$ с уравнением (5). Второй член (8) описывает поляризационно-лучевой вихрь, направление вращения которого перпендикулярно направлению "скалярной" части траектории.

Обратимся к работе [11]. Не останавливаясь на некоторых некорректностях в постановке задачи исследований этой работы, отметим, что в многомодовом оптическом волокне вследствие действия топологических законов [5] имеет место полная деполяризация света, поэтому выводы этой работы довольно спорные. Однако, среди множества собственных мод многомодового волокна не испытывают изменения состояния поляризации только фундаментальные моды HE_{1m} (которые, к сожалению, не принимаются автором во внимание). Если идентифицировать распространение фундаментальной моды HE_{1m} в одномодовом волокне с локальной волной, распространяющейся вдоль заданного направления, то можно использовать из [11] одно полезное соотношение, касающееся поперечной компоненты волнового вектора:

$$g = -\tfrac{1}{4}\sigma\left[\ell_z \times \nabla \ln\{n(x, y, z)\}\right], \qquad (9)$$

где σ - спиральность фотона, ℓ_z - единичный вектор оси z. Тогда, используя (9), из уравнения (8) получаем:

$$\frac{d^2x_\nu}{dz^2} = \frac{\partial(\ln n)}{\partial x_i}\Pi_{ij} + \frac{\sigma}{4K}\varepsilon_{\nu\ell\kappa}\frac{dx_\nu}{dz}\frac{dx_\ell}{dz}\frac{\partial^2(\ln n)}{\partial x_\kappa \partial x_\ell}, \qquad (10)$$

где $\Pi_{ij} = \delta_{ij} - \left(dx_i/dz\right)\left(dx_j/dz\right)$,

δ_{ij} - символ Кронекера, $\varepsilon_{\nu\ell\kappa}$ - псевдотензор Леви-Чивита. С учетом соотношения между линейной и циркулярной поляризациями

$$U_\pm = \left(U_x + i\sigma U_y\right) \qquad (11)$$

получаем самосогласованную систему уравнений (2),(10). Эта система описывает взаимосвязь между топологической фазой Берри и поляризационно-лучевым вихрем. Качественный анализ системы (2), (10) показывает: 1. метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ содержит спиральность σ и, следовательно, поляризационно-лучевые вихри могут существовать не только в неоднородной оптической среде, но и в искривленном физическом пространстве; 2. поскольку уравнения для $\sigma = +1$ и $\sigma = -1$ имеют два независимых решения, то возникает топологическое двулучепреломление [7] в неоднородной среде, а поскольку компоненты $g^{+1}_{\alpha\beta}$ и $g^{-1}_{\alpha\beta}$ вблизи сильных гравитационных потенциалов значительно различаются, то возникает расслоение физического пространства.

3. Топологическое двулучепреломление

Рассмотрим распространение линейно поляризованной волны в неоднородной осесимметричной среде с показателем преломления

$$n^2(x, y) = n_0^2\left[1 - \alpha\left(x^2 + y^2\right)\right] \qquad (12)$$

Ось z направим вдоль оси неоднородной среды. Пусть локальная волна $U(z = 0)$ пересекает ось среды. Тогда в отсутствие поляризационно-лучевого вихря ее траектория будет плоской синусоидальной кривой [12], для которой топологическая фаза Берри равна нулю [4]. Для учета поляризационно-лучевого вихря необходимо решать самосогласованную систему уравнений (2), (10). С учетом начальных условий $U(0) = \{1;0\}$ и $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ получаем решения в виде:

$$\begin{aligned} x_1^+ &= A\cos(\alpha t)\cos(\beta t); & x_2^+ &= A\cos(\alpha t)\sin(\beta t); & x_3^+ &= ct \\ x_1^1 &= A\cos(\alpha t)\cos(\beta t); & x_2^1 &= -A\cos(\alpha t)\sin(\beta t); & x_3^- &= ct \end{aligned} \qquad (13)$$

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z, \qquad (14)$$

где A - амплитуда траектории, $\alpha = \pi c/\ell$ - частота геодезической, $\beta = Xc$, c - скорость распространения вдоль оси z, X - удельное кручение геодезической, и фаза Берри:

$$\Omega^+ = \pi\rho_{max}\rho_{min} r/\ell, \quad (15) \qquad\qquad \Omega^- = -\Omega^+ \quad (16)$$

r - радиус-вектор волны,

Таким образом, единичная локальная волна расщепилась на две циркулярно поляризованные волны с $\sigma = \pm 1$, распространяющиеся по геликоидальным спиралям с противоположным направлением закручивания X. Фазовая скорость этих локальных волн определится как

$$\frac{dr}{dt} = v^\pm = \frac{\omega}{k \mp \Omega_0}, \qquad (17)$$

$\Omega_0 = \pi\rho_{max}\rho_{min}/\ell$ - удельная фаза Берри. Таким образом, имеет место топологическое двулучепреломление.

Представим, что локальная волна распространяется в искривленном пространстве вблизи гравитирующего потенциала φ_r. Согласно вышесказанному, можно записать соответственные метрические тензора этого пространства $g^{\pm 1}_{\alpha\beta}$, которым будет соответствовать удельная фаза Берри Ω_{0g}. Учтем гравитационное смещение частоты [14]:

$$\nu = \nu_0(1 - \varphi_r/c), \tag{18}$$

где, $\varphi_r = \gamma_0 M/R$

γ_0 - ньютоиовская постоянная тяготения, M - гравитирующая масса, R - радиус этой массы. Тогда фазовые скорости распространения локальных волн в искривленном пространстве будут:

$$v^{\pm} = \frac{c}{1 \mp \chi_0\Omega_{0g}(1 - \varphi_r/c^2)}, \chi_0 = \lambda_0/2\pi \ (\varphi_r = 0 \rightarrow \Omega_{0g} = 0) \tag{19}$$

То есть, вблизи сильно гравитирующих масс происходит расщепление скорости иа две скорости: $v^+ \prec c$ и $v^- \succ c$, что соответствует двум метрическим тензорам $g^{+1}_{\alpha\beta}$ и $g^{-1}_{\alpha\beta}$. Таким образом, вблизи сильно гравитирующих масс происходит расслоение пространства, скорость света в одном из них c^+, а в другом - c^-.

Вернемся к оптически неоднородной среде. Пусть такой средой является оптическое волокно диаметром $D = 200$ мкм и числовой апертурой 0.25. Для полярного угла локальной волны $U_c \approx 0.1$ рад получаем величину фазы Берри $\Omega = \pi/2 \ 10^{-2}$ рад, а величина топологического двулучепреломления $\delta_t = \pi \ 10^{-7}$. Величина этого двулучепреломления сравнима с величиной собственного двулучепреломления волокон, а для специальных типов волокон на порядок величины больше. Полученные теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментом по определению топологического двулучепреломления, приведенном в работе [7].

Таким образом, суммируя сказанное, отметим, что физические процессы, ответственные за взаимосвязь топологической фазы Берри и поляризационио-лучевых вихрей в многомодовом градиентном волокне, являются следствием параллельного переноса вектора электрического поля в фазовом пространстве и распространения света по геодезическим в римановом многообразии. Эти процессы описываются самосогласованной системой уравнений (2), (10). Характер физического процесса определяется видом метрического тензора. Метрический тензор единым образом зависит от потенциала поля, создающего риманово многообразие (для многомодового волокна им является квадрат показателя преломления). Следствием определяющей роли метрического тензора в процессах взаимодействия является возникновение поляризационно-лучевых вихрей в искривленном фнзическом вакууме. Как и в многомодовом волокие, в искривленном вакууме снимается вырождение скорости света и возникает топологическое двулучепреломление.

Авторы благодарны проф. Соскииу М.С., проф. Мицаю Ю.Н., проф.Одулову С.Г. за ряд ценных замечаний и обсуждений некоторых результатов работы[1].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Работа выполнена при фиидансовой поддержке фонда фундаментальных исследований при ГКНТ Украины.

1. Беденхаун Л., Лаук Дж. Угловой момент в квантовой физике. М.:Наука, 1984, Т.2, С.647.

2. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.:Наука, 1989, Т.4, С.723.

3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.:Наука, 1970, С.463.

4. Винницкий С., Дербов В., Дубовик В., Марковски Б., Степановский Ю. Топологнческие фазы в квантовой механике и поляризационной оптике. УФН, 1990, Т.160, В.6, С.1.

5. Воляр А.В., Кухтарев Н.В., Лапаева С.Н., Лейфер П.Н. Геометрическая фаза и восстановление поляризации при ОВФ в многомодовом волокне. Письма в ЖТФ, 1991, Т.17, В.13, С.1.

6. Воляр А.В., Лапаева С.Н. Колебательная неустойчивость лучевых траекторий и поляризационных состояний света в многомодовом волокне. Письма в ЖТФ, 1992, Т.18, В.8, С.5.

7. Воляр А.В., Мицай Ю.Н., Мягков В.И., Фадеева Т.А. Взаимодействие топологической фазы Берри и оптического эффекта Магнуса 1. Топологическое двулучепреломление оптических волокон. Письма в ЖТФ, 1994, Т.20, В.3, С.48.

8. Дирак П., Морис А. К созданию квантовой теории поля. Основные статьи 1925-1958 гг. М.:Мир, 1962, С.83.

9. Дугин А.В., Зельдович Б.Я., Кундикова Н.Д., Либерман В.С. Оптический аналог эффекта Магнуса. ЖЭТФ, 1991, Т.100,В.5. С.1474.

10. Перов А.З. Пространства Энштейна. М.:ГИМФЛ, 1961, С.463.

11. Садыков Н.Р. Распространение циркулярно поляризованного света по искривленным траекториям.Квантовая электроника, 1992, Т.19, В.10, С.1021.

12. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987, С.655.

13. Швардшильд К. О гравитационном поле точечной массы в эйнштейновской теории. В сб. Альберт Энштейн и теория гравитации. М.:Москва, 1979, С.199.

14. Эйнштейн А.О специальной и общей теории относительности. Собрание научиых трудов. М.:Наука, 1965, Т.1, С.45.

15. Berry M. Quantum phase factors accompanyind adiabatic changes. Pros. R. Soc. Lund., 1984, A-392, P.40.

16. Liberman V.S., Zeldovich B.Ya. Spin-orbit interaction of a photon in a inhomogeneous medium. Phys.Rev.A, 1992, V.46, N 8, P.5199.

17. Tomito A., Ciao R. Observation of Berry's topolocical phase by use of an optical fiber. Phys.Rev.Lett., 1986, V.57, N 8, P.937.