

КЛАССИФИКАЦИЯ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА В ДРУГОЕ

А.И.Криворучко, кандидат физико-математических наук, доцент

Введение. Пусть $f, g: V \rightarrow W$ — гомоморфизмы конечномерных векторных пространств. На основе теории элементарных делителей λ -матриц сначала в [1] (в регулярном случае, когда среди отображений $f + \lambda g$ имеются изоморфизмы), а затем в [2] (в сингулярном случае) построены базисы V и W , в которых f и g (одновременно) описываются "наиболее простыми" матрицами, и дана линейная классификация пар (f, g) .

Вопросы, связанные с линейной классификацией четверок плоскостей, приводят к следующей задаче.

Пусть $f: A \rightarrow W$ и $g: B \rightarrow V$ — гомоморфизмы конечномерных векторных пространств, удовлетворяющие одному из следующих двух условий:

1. $A \subset V, B \subset W$.

II. A и B — подпространства некоторого векторного пространства $L, V = W$.

Построить базисы, в которых f и g описываются "возможно более простым" (каноническим) способом, определяемым классом линейной эквивалентности пары (f, g) .

В настоящей заметке решается эта задача. При этом получена линейная классификация пар гомоморфизмов, удовлетворяющих указанным выше условиям.

1°. Пусть f, g удовлетворяют условиям I или II. В первом случае положим $P = A + g(B), Q = B + f(A)$, а во втором — $P = A + B, Q = f(A) + g(B)$.

Будем считать, что $P \cap Q$ содержит лишь общий нулевой вектор P и Q .

Назовем (f, g) -цепочкой (или просто цепочкой) цветной граф, являющийся простой цепью, вершины которой — попарно различные ненулевые векторы из $P \cup Q$; при этом каждому ребру графа сопоставлено f или g (цвет ребра) так, что выполняются следующие условия:

а) у каждого подграфа — одна из вершин является образом другой при гомоморфизме, сопоставленном ребру подграфа;

б) у каждого подграфа — одному из его ребер сопоставлено f , а другому — g .

Две цепочки назовем эквивалентными, если между ними существует изоморфизм цветных графов, сохраняющий принадлежность вершин соответствующим пространствам P, Q .

Пару базисов P, Q для пространств P, Q соответственно назовем канонической для (f, g) , если $P \cup Q$ допускает разбиение $(P_0, Q_0, T_1, \dots, T_k)$ такое, что $P_0 \subset P, Q_0 \subset Q$ соответствующие сужения f, g являются изоморфизмами между $\langle P_0 \rangle$ и $\langle Q_0 \rangle$ (и можно считать, что их соответствующая композиция $\varphi: \langle P_0 \rangle \rightarrow \langle Q_0 \rangle$ имеет в базисе P_0 , например, вторую естественную форму), а T_i является множеством всех вершин некоторой максимальной (f, g) -цепочки ($i = \overline{1, k}$) (случай $P_0 = Q_0 = \emptyset, k = 0$ не исключаются).

Нетрудно проверить, что если такое разбиение существует, то оно единственно с точностью до перестановки T_1, \dots, T_k .

Будем называть его каноническим разбиением пары (P, Q) .

Пусть (P', Q') — еще одна каноническая пара базисов для (f, g) , $(P'_0, Q'_0, T'_1, \dots, T'_k)$ — ее каноническое разбиение, $\varphi': \langle P'_0 \rangle \rightarrow \langle P_0 \rangle$ — соответствующий этой паре базисов автоморфизм. Назовем (P', Q') эквивалентной (P, Q) , если φ и φ' линейно эквивалентны, $k = k'$ и, с точностью до перестановки, T'_i эквивалентна T_i для всех $i = \overline{1, k}$.

Теорема. Пусть (f, g) удовлетворяет условиям I или II. Тогда (f, g) имеет каноническую пару базисов и любые две канонические пары базисов (f, g) эквивалентны.

2⁰. Докажем теорему, предполагая, что f и g удовлетворяют условию I.

В этом случае среди всех пар подпространств $X \subset A, Y \subset B$, для которых $f(X) = Y, g(Y) = X$, существует наибольшая пара (A_0, B_0) ; ее а также пару $(f|_{A_0}, g|_{B_0})$ будем называть биективными частями (A, B) и (f, g) соответственно.

Лемма I. Пусть (f, g) — пара с нулевой биективной частью $C = f(A) \cap B, h = g|_C$. Тогда (f, h) — пара с нулевой биективной частью и, если для нее существует каноническая пара базисов, то и для (f, g) существует каноническая пара базисов; при этом, если любые две канонические пары базисов (f, h) эквивалентны, то и любые две канонические пары базисов (f, g) эквивалентны.

Доказательство. Пусть (P', Q') — каноническая пара базисов (f, h) . Тогда $P' \cup Q'$ распадается на максимальные цепочки следующих четырех типов:

$$T_j^1 \text{ - цепочка } \begin{array}{ccccccc} & a_{j1}^1 & & \dots & & & \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \\ & & b_{j1}^1 & & & b_{j1}^1 & \in B \end{array}$$

где $j = \overline{1, l_1}$;

$$T_j^2 \text{ - цепочка } \begin{array}{ccccccc} & a_{j1}^2 & & \dots & & & a_{j1}^2 \notin \ker f \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ & & b_{j1}^2 & & & & \end{array}$$

где $j = \overline{1, l_2}$;

$$T_j^3 \text{ - цепочка } \begin{array}{ccccccc} & a_{j1}^3 & & \dots & & & a_{j1}^3 \in A \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ & & b_{j1}^3 & & & & \end{array}$$

где $j = \overline{1, l_3}$;

$$T_j^4 \text{ - цепочка } \begin{array}{ccccccc} & a_{j1}^4 & & \dots & & & \\ & \searrow & \nearrow & & \searrow & & \\ & & b_{j1}^4 & & & b_{j1}^4 \notin \ker g & \text{ где } j = \overline{1, l_4}. \end{array}$$

Положим $D = A \cap g(B)$. Будем считать, что $a_{j1}^i \in D$ для всех $j \leq m_i$ и $a_{j1}^i \in D$ для всех $j > m_i$, где $0 \leq m_i \leq l_i$.

Пусть Q'' состоит из всех $b_{jk}^i \in C \setminus \ker h$, $C = \langle Q'' \rangle$. Тогда h / c' — мономорфизм, $C = \ker h \oplus C$, $B = \ker g \oplus B'$ для некоторого $B' \supset C$. Пусть $g' = g / B'$. Тогда $g': B' \rightarrow g(B)$ — изоморфизм, $D \subset g(B)$ и поэтому для всех $i = \overline{1, 4}$ и $j > m_i$ найдется $b_{j0}^i \in B'$, для которого $g(b_{j0}^i) = a_{j1}^i$.

Векторы $b_{jk}^i \in B'$ линейно независимы и их можно дополнить векторами $b_{j1}^5 \in B' (j = \overline{1, l_5})$ и $b_{j1}^6 \in \ker g (j = \overline{1, l_6})$ до базиса в B .

Теперь множество P всех a_{jk}^i является объединением множества \tilde{A} всех тех из них, которые принадлежат A (и образуют базис A), и $g'(B')$, где B' — множество всех $b_{jk}^i \in B'$; B' — базис B' , поэтому $g'(B')$ — базис $g(B)$; кроме того, $g'(B') \cap \tilde{A}$ — базис $A \cap g(B)$. Отсюда P — базис P . Аналогичным образом показывается, что $Q = \tilde{B} \cup f(A')$, где A' — множество всех $a_{jk}^i \in A \setminus \ker f$, \tilde{B} — множество всех $b_{jk}^i \in B$, является базисом Q . По построению, (P, Q) каноническая пара базисов. При этом класс эквивалентности пары (P, Q) определяется классом эквивалентности пары (P', Q') , которая, в свою очередь, определяется парой (P, Q) .

Лемма 2. Пусть (A_0, B_0) — биективная часть пары (A, B) , $\tilde{f}: A/A_0 \rightarrow B/B_0$, $\tilde{g}: B/B_0 \rightarrow A/A_0$ — фактор отображения отображений f и g . Тогда (\tilde{f}, \tilde{g}) имеет нулевую биективную часть.

Доказательство. Допустим, что $\tilde{f}[a] = [b]$, $\tilde{g}(b) = \mu(a)$. Тогда $f(A') \subset B'$, $g(B') \subset A'$, где $A' = A_0 + \langle a \rangle$, $B' = B_0 + \langle b \rangle$. В силу максимальности биективной пары (A_0, B_0) , отсюда $[a]$ и $[b]$ — нулевые векторы в факторпространствах. Предположим, что существуют двумерные $C \subset A/A_0$ и $D \subset B/B_0$ такие, что $\tilde{f}(C) = D$, $\tilde{g}(D) = C$. Пусть ненулевой $[a] \in C$. Тогда $\tilde{f}[a] = [b] \neq 0$, $\tilde{g}[b] = [a_1] \neq [a]$. Следовательно, $C = \langle [a], [a_1] \rangle$, $D = \langle [b], [b_1] \rangle$, где $[b_1] = \tilde{f}[a_1]$, $f(a) = b + b_2$, $g(b) = a_1 + a_2$, $f(a_1) = b_1 + b_3$, $g(b_1) = l a + m a_1 + a_3$, $\langle a_2, a_3 \rangle \subset A_0$, $\langle b_2, b_3 \rangle \subset B_0$, $\langle a, a_1 \rangle \cap A_0 = \langle b, b_1 \rangle \cap B_0 = \langle 0 \rangle$. Положим $A' = \langle A_0, a, a_1 \rangle$, $B' = \langle B_0, b, b_1 \rangle$. Тогда $f(A') = B'$, $g(B') \subset A'$, что невозможно. Лемма доказана.

Пусть теперь T — (\tilde{f}, \tilde{g}) -цепочка. Пользуясь тем, что f и g отображают классы эквивалентности векторов на классы эквивалентности, из каждого класса, являющегося вершиной T , то можно выбрать представитель таким образом, чтобы выбранные представители образовывали (f, g) -цепочку, эквивалентную T . Кроме того, полагая $A_1 = A/A_0$, $B_1 = B/B_0$, $A_{2k+2} = A_{2k+1}$, $B_{2k+2} = B_{2k+1} \cap \tilde{f}(A_{2k+1})$,

$A_{2k+3} = A_{2k+2} \cap \tilde{g}(B_{2k+1})$, $B_{2k+3} = B_{2k+2}$, по индукции строим убывающую последовательность (A_i, B_i) , которая поэтому стабилизируется, а тогда $A_i = B_i = \langle 0 \rangle$ для некоторого i . Используя это, а также леммы 1 и 2, получаем доказательство теоремы в случае, когда f и g удовлетворяют условию 1.

3°. Предположим теперь, что f и g удовлетворяют условию II. Определим пару $(f, g)_f$. Положим $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = \langle 0 \rangle$, и если A_i, B_i, C_i, D_i уже определены, то $A_{i+1} = f^{-1}(C_i)$, $B_{i+1} = A_{i+1} \cap B$, $D_{i+1} = g(B_{i+1})$, $C_{i+1} = D_{i+1} \cap f(A)$.

Последовательности $(A_i), (B_i), (C_i), (D_i)$ возрастают и поэтому стабилизируются, начиная с некоторого номера k .

Положим

$$(f, g)_f = (f|_{A_k}, g|_{B_k}). \quad (1)$$

Аналогичным образом определяются $(f, g)_g$.

Лемма 3. Если для $(f, g)_f$ существуют канонические пары базисов и все такие пары базисов эквивалентны друг другу, то и для (f, g) существуют канонические пары базисов и все они эквивалентны друг другу.

Доказательство. Пусть $(f, g)_f$ определена равенством (1). Заметим, что $f^{-1}(g(A_k)) = A_k$ и $f(A_i) \subset g(A_{i-1})$ для всех i ; (2)

это позволяет определить фактор отображения

$$\tilde{f}: A/A_k \rightarrow W/g(A_k), \quad \tilde{g}: B/A_k \rightarrow W/g(A_k).$$

В силу уже доказанной части теоремы и мономорфности \tilde{f} получаем, что (\tilde{f}, \tilde{g}) имеет канонические пары базисов, причем все они эквивалентны друг другу. Пусть (\tilde{P}, \tilde{Q}) — одна из этих пар. Если T — (\tilde{f}, \tilde{g}) -цепочка, входящая в каноническое разбиение (\tilde{P}, \tilde{Q}) , то из каждого класса, являющегося вершиной T , можно выбрать представитель таким образом, чтобы все эти представители образовывали (f, g) -цепочку, эквивалентную T . При этом используется то, что \tilde{f} — мономорфизм, а g отображает классы эквивалентности на классы эквивалентности.

Допустим теперь, что $[a_i] \in \tilde{P}_0$, $[u_i] \in \tilde{Q}_0$, $\tilde{f}[a_i] = [u_i]$ ($i = \overline{1, m}$), $\tilde{g}[a_j] = [u_{j+1}]$

$$(j = \overline{1, m-1}), \quad \tilde{g}[a_m] = \sum_{i=1}^m \gamma_i [u_i] \quad (\gamma_i \neq 0).$$

Тогда можно считать, что

$$\left. \begin{aligned} f(a_i) &= u_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad g(a_j) = u_{j+1} + d_j \\ (j = \overline{1, m-1}), \quad g(a_m) &= \sum_{i=1}^m \gamma_i u_i + d_m \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $d_i \in g(A_k)$ ($i = \overline{1, m}$). Отсюда $d_i = g(e_i)$,
 $e_i \in A_k, f(e_i) \in g(A_{k-1})$. Поэтому для
 $\tilde{a}_i = a_i - e_i \in [a_i]$ и $\tilde{u}_i = u_i + f(e_i) \in [u_i]$ после переобозначения представи-
 телей, имеем (3), где $d_i \in g(A_{k-1})$. Производя аналогичную замену k раз, получаем (3),
 где теперь все $d_i = 0$.

Дополняя множество всех выбранных таким образом представителей векторами из $P \cup Q$, где (P, Q) - каноническая пара базисов для $(f, g)_f$, получаем каноническую пару базисов для (f, g) , класс эквивалентности которой определяется классами эквивалентности пар (P, Q) и (\tilde{P}, \tilde{Q}) . Лемма доказана.

Для доказательства теоремы положим $(f_1, g_1) = (f, g)_f$, и если уже определена па-
 ра (f_{2m-1}, g_{2m-1}) , то положим $(f_{2m}, g_{2m}) = (f_{2m-1}, g_{2m-1})_{g_{2m-1}}$,
 $(f_{2m+1}, g_{2m+1}) = (f_{2m}, g_{2m})_{f_{2m}}$.

Пусть X_i — область определения f_i , Y_i — область определения g_i . Тогда последовательности (X_i) и (Y_i) убывают и поэтому стабилизируются на некотором номере s , а тогда

$$(f_s, g_s)_{f_s} = (f_s, g_s)_{g_s} = (f_s, g_s). \quad (4)$$

В частности, $X_s = Y_s$ и можно сослаться на указанные во введении результаты, полученные в [1; 2] (см. также [3, с. 312 - 324]).

Замечание. Условие (4) позволяет построить каноническую пару базисов для (f_s, g_s) тем же способом, который применялся при доказательстве лемм 1 и 3, не используя теории элементарных делителей λ -матриц и результатов из [1, 2]. При этом выясняется геометрический смысл минимальных индексов и других линейных инвариантов пары гомоморфизмов, определенных алгебраически в [1, 2] для случая $A = B$.

Работа финансируется из Государственного фонда фундаментальных исследований и ГКНТ Украины.

Список литературы

1. K. Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.- Monatsh. Akad. Wiss. Berlin (1867), s. 310-338.
2. L. Kronecker, Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen.- Sitz.- Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, Berlin (1890), s. 763-776.
3. Ф.Р. Гентмахер, Теория матриц. Наука, Москва (1988), 552 с.