

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.Д.Копачевский, доктор физико-математических наук, профессор, академик КАН, заслуженный деятель науки и техники Украины, Л.Д. Орлова(Болгова), аспирант, Ю.С. Пашкова, аспирант.

### § 0. Введение.

В данной работе отражены исследования, проведенные на кафедре математического анализа СГУ в последние несколько лет. Здесь методы функционального анализа применяются при качественном исследовании сложных гидромеханических систем, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы. При доказательстве теорем использованы теория полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, метод сжимающих отображений, различные вопросы спектральной теории оператор-функций и др.

Результаты в статье в основном формулируются в абстрактном виде и могут быть легко применены для конкретных гидромеханических систем. В §1 рассмотрены задачи о малых движениях и нормальных колебаниях систем для однородной несжимаемой жидкости. Эти системы являются непосредственным обобщением на бесконечномерный случай задач об устойчивости механических систем с конечным числом степеней свободы (см., например, [1—3], а также [4]). Теоремы о неустойчивости, полученные здесь, близки к результатам работ [5—7]. Основной математический аппарат, использованный при получении результатов, можно найти в монографиях [8—11]. В других задачах он применялся, например, в работах [12—14].

Вопросы, рассмотренные в §2, близки к работе [15], однако здесь задача о движении вязкоупругой среды изучена в более общей ситуации.

При этом использованы результаты работ [16,17]. В §3 исследован новый класс задач о малых колебаниях релаксирующей идеальной жидкости. Методы исследования близки к работам [18—20, 10—11].

Отметим, что ввиду недостатка места теоремы и основные выводы в данной статье приведены без доказательства. Отметим еще, что в недавней публикации [21] рассмотрены вопросы, близкие к задачам §1.

Эта работа частично поддержана ГК Украины по науке и технологиям (тема 115/94), а также Международным научным фондом (грант NZP 000).

### §1. ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ.

**1. Математическая постановка задачи.** В сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим дифференциально-операторное уравнение вида

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (F + K) \frac{du}{dt} + Bu = f(t) \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u^0, u'(0) = u^1 \quad (1.2)$$

Здесь  $u(t)$  — искомая функция переменной  $t$  со значениями в  $H$ ; в приложениях ее физический смысл — поле малых отклонений гидромеханической системы от состояния относительного равновесия. Далее, правая часть  $f(t)$  в (1.1) — заданная функция со значениями в  $H$ , характеризующая малое поле внешних сил, действующих на гидромеханическую систему. Операторные коэффициенты  $B$ ,  $F$  и  $K$  имеют следующий физический смысл:  $B$  — оператор потенциальной энергии системы,  $F$  — оператор диссипации,  $K$  — кориолисов оператор, учитывающий действие на систему кориолисовых сил. (Роль оператора кинетической энергии играет в (1.1) единичный оператор  $I$ , стоящий перед  $u''(t)$ .)

Обозначим через  $L(H)$  алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в  $H$ , а символами  $A \geq 0$ ,  $A > 0$ ,  $A \gg 0$  — свойства неотрицательности, положительности и равномерной положительности (положительной определенности) оператора  $A$ . Если  $A - \gamma I \geq 0$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ , то говорят, что оператор  $A$  ограничен снизу.

Относительно операторных коэффициентов задачи (1.1) предположим, что имеют место свойства, обычно выполненные для гидромеханических систем с однородной несжимаемой жидкостью:

$$1^0. B = B^* \geq \gamma I; 2^0. K^* = -K \in L(H); 3^0. F \geq 0 \quad (1.3)$$

Если  $\gamma > 0$ , т.е. оператор потенциальной энергии положительно определен, то говорят, что рассматриваемая система статически устойчива по линейному приближению. Свойство  $2^0$  кососимметричности оператора  $K$  обусловлено действием на систему кориолисовых сил, если система в состоянии относительного равновесия равномерно вращается с некоторой угловой скоростью. Далее, свойство  $3^0$  для оператора диссипации  $F$  естественно с физической точки зрения.

**2. Теоремы о разрешимости задачи Коши.** При исследовании задачи (1.1)—(1.2) могут быть применены общие методы теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка с диссипативным операторным коэффициентом, действующим в гильбертовом пространстве [8].

Обозначим через  $D(B)$  и  $D(F)$  области определения (вообще говоря, неограниченных) самосопряженных операторов  $B$  и  $F$  соответственно и будем считать, что они плотны в  $H$ . Через  $C^k([0, T]; H)$  обозначим банахово пространство  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в  $H$ : если  $u(t) \in C^k([0, T]; H)$ , то

$$\|u(t)\|_{C^k([0, T]; H)} = \sum_{j=0}^k \max_{0 \leq t \leq T} \|u^{(j)}(t)\|_H < \infty$$

**Определение 1.1.** Решением дифференциального уравнения (1.1) назовем функцию  $u(t)$  со значениями в  $H$ , для которой при любом  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , будет  $u(t) \in D(B)$ ,  $Bu(t) \in C([0, T]; H)$ ,  $u'(t) \in D(F) \cap D(B^{\frac{1}{2}})$ ,  $u'(t) \in C([0, T]; H)$ ,  $Fu'(t) \in C([0, T]; H)$ ,  $u''(t) \in C([0, T]; H)$  и выполнено уравнение (1.1).

Если свойство  $B \geq 0$  не выполнено (и потому не существует  $B^{\frac{1}{2}} \geq 0$ , то при определении решения уравнения (1.1) считаем, что  $B = B_+ - B_-$ ,  $B_+ \geq 0$ ,  $B_- \in L(H)$ , и тогда требование  $u'(t) \in D(F) \cap D(B^{\frac{1}{2}})$  заменяется требованием  $u'(t) \in D(F) \cap D(B_+^{\frac{1}{2}})$ .

**Теорема 1.1.** Пусть в задаче Коши (1.1), (1.2) выполнены условия

$$\begin{aligned} B \geq 0, f(t) \in C^1([0, T]; H), \\ u^0 \in D(B), u^1 \in D(F) \cap D(B^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тогда она имеет единственное решение  $u(t)$ , и для этого решения выполнен закон баланса полной энергии системы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \|u'(t)\|_H^2 + \|B^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H^2 \right) = \frac{1}{2} \left( \|u^1\|_H^2 + \|B^{\frac{1}{2}}u^0\|_H^2 \right) - \\ - \int_0^t \|F^{\frac{1}{2}}u'(\tau)\|_H^2 d\tau + \int_0^t (f(\tau), u'(\tau)) d\tau, \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Построенная по решению  $u(t)$  функция  $y(t) = (u'(t); -i B^{\frac{1}{2}}u(t))^t$  со значениями в  $H^2 = H \oplus H$  является непрерывно дифференцируемой функцией и представима в виде

$$\begin{aligned} y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t - \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau, \\ \tilde{f}(t) = (f(t); 0)^t, y^0 = (u^1; -i B^{\frac{1}{2}}u^0)^t, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $U(t)$  — сжимающая полугруппа операторов с генератором  $-A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 2iG + F & iB^{\frac{1}{2}} \\ iB^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, G = G^* = -iK \in L(H) \quad (1.7)$$

**Определение 1.2.** Будем говорить, что  $U(t)$  — обобщенное решение задачи Коши (1.1), (1.2), если функция  $y(t) = (u'(t); -i B^{\frac{1}{2}}u(t))^t$  представима в виде (1.6) с  $y^0 \in H^2, \tilde{f}(t) \in C([0, T]; H^2)$ .

**Теорема 1.2.** Если выполнены условия

$$B \geq 0, f(t) \in C([0, T]; H), u^0 \in D(B^{\frac{1}{2}}), u^1 \in H \quad (1.8)$$

то задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение; при этом функции  $u'(t)$  и  $B^{\frac{1}{2}}u(t)$  непрерывны и имеет место неравенство

$$\|y(t)\|_{H^2} = \left( \|u'(t)\|_H^2 + \|B^{\frac{1}{2}}u(t)\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \|u^1\|_H^2 + \|B^{\frac{1}{2}}u^0\|_H^2 \right) + T \|f(t)\|_{C([0, T]; H)} \quad (1.9)$$

**Теорема 1.3.** Пусть в задаче (1.1), (1.2) выполнены условия

$$\begin{aligned} B = B_+ - B_-, B_+ \geq 0, 0 < B_- \in L(H), \\ f(t) \in C^1([0, T]; H), u^0 \in D(B), u^1 \in D(F) \cap D(B_+^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Тогда она имеет единственное решение  $u(t)$  на любом промежутке  $[0, T], T > 0$ ; для этого решения выполнен закон (1.5) баланса полной энергии системы с заменой слагаемых

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^0 &\rightarrow \|\mathbf{B}_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{B}_-^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{H}}^2, \\ \|\mathbf{B}^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{H}}^2 &\rightarrow \|\mathbf{B}_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{H}}^2 - \|\mathbf{B}_-^{\frac{1}{2}}\mathbf{u}^0\|_{\mathbf{H}}^2. \end{aligned}$$

Теоремы 1.1 — 1.3 есть утверждения о корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2) на промежутке  $[0, T]$  как в устойчивом ( $\mathbf{B} \geq 0$ ), так и в неустойчивом ( $\mathbf{B}_- > 0$ ) случае.

**3. Спектральная задача. Теоремы о неустойчивости.** Рассмотрим решения однородного уравнения (1.1), зависящие от  $t$  по закону

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}e^{-\lambda t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H} \quad (1.11)$$

Тогда взамен (1.1) приходим к спектральной задаче вида

$$\mathbf{L}(\lambda)\mathbf{v} = (\lambda^2\mathbf{I} - \lambda(\mathbf{F} + \mathbf{K}) + \mathbf{B})\mathbf{v} = 0 \quad (1.12)$$

для квадратичного операторного пучка  $\mathbf{L}(\lambda)$  с неограниченными операторными коэффициентами  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{B}$ . Если задача (1.12) имеет нетривиальное решение  $(\mathbf{v}; \lambda)$  с  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ , то ему отвечает экспоненциально возрастающее с ростом  $t$  решение однородной эволюционной задачи (1.1).

Областью определения  $\mathbf{D}(\mathbf{L}(\lambda))$  операторного пучка  $\mathbf{L}(\lambda)$  будем считать множество  $\mathbf{D}(\mathbf{F}) \cap \mathbf{D}(\mathbf{B})$ , плотное в  $\mathbf{H}$ .

При исследовании задачи (1.12) будем пользоваться известными определениями (см., например, [9,10,11]) изолированного собственного значения, собственного и присоединенного элементов и др. для операторных пучков как с ограниченными, так и неограниченными операторными коэффициентами. Множество всех компактных операторов, действующих в  $\mathbf{H}$ , обозначим через  $\mathbf{G}_\infty(\mathbf{H})$  или просто  $\mathbf{G}_\infty$ .

**Теорема 1.4 (о неустойчивости).** Пусть выполнены условия (1.3),  $\mathbf{K} = 0$ , а также условия

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-, \quad \mathbf{B}_+ \geq 0, \quad 0 < \dim \mathbf{B}_- = \chi < \infty, \quad \mathbf{F} \gg 0, \\ 0 < \mathbf{F}^{-1} \in \mathbf{G}_\infty(\mathbf{H}), \quad \mathbf{B}_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}^{-1} \in \mathbf{G}_\infty(\mathbf{H}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тогда задача (1.12) имеет в левой комплексной полуплоскости ровно  $\chi$  (с учетом кратностей) собственных значений, которые расположены на вещественной оси. В правой комплексной полуплоскости спектр задачи (1.12) дискретен и имеет две предельные точки  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \infty$ . Все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, вещественны.

**Теорема 1.5 (о неустойчивости).** Пусть в задаче (1.12) выполнены условия (1.3) и (1.13), а также условие

$$\operatorname{Ker} \mathbf{B} = \{0\} \quad (1.14)$$

Тогда в левой комплексной полуплоскости (при любом  $\mathbf{K} \in \mathbf{L}(\mathbf{H})$ ) задача (1.12) имеет ровно  $\chi$  (с учетом кратностей) собственных значений.

Таким образом, из теоремы 1.4 следует, что если гидромеханическая система статически неустойчива по линейному приближению и минимальное собственное значение оператора потенциальной энергии  $\mathbf{B}$  отрицательно, то эта система является и динамически

неустойчивой. Что касается теоремы 1.5, то ее физический смысл состоит в том, что при наличии в системе диссипации (со свойствами (1.13) у оператора  $F$ ) "включение" в действие кориолисовых сил не изменяет факта неустойчивости системы: как и в задачах с конечным числом степеней свободы (см. [1—3]), здесь не происходит гироскопическая стабилизация системы.

В заключение этого пункта отметим, что утверждения теорем 1.4 и 1.5 по своим формулировкам наиболее близки к теоремам, полученным в [7] для пучков вида (1.12) в предположениях, отличных от (1.13): в задаче В.Н.Пивоварчика "главным" операторным коэффициентом является не оператор  $F$ , а оператор  $V_+$ .

**4.Примеры.** Рассмотрим некоторые гидромеханические системы, для которых справедливы утверждения теорем 1.1—1.5 (см. [11]).

1.0 Консервативные системы:  $F = 0$ .

а) Тяжелая идеальная жидкость в частично заполненном неподвижном сосуде. Здесь  $K = 0$ ,  $V \gg 0$ , причем оператор  $V$  имеет дискретный спектр.

б) Капиллярная идеальная жидкость в частично заполненном сосуде. Здесь снова  $K = 0$ , а оператор  $V = V_+ - V_-$ ,  $V_+ \geq 0, 0 \leq \dim V_- = x < \infty$ .

в) Маятник с полостью, частично заполненной идеальной тяжелой жидкостью (задача Н.Н.Монсеева — С.Г.Крейна). Здесь оператор  $V$  имеет дискретный спектр с  $0 \leq \dim V_- \leq 2$ .

г) Маятник с полостью, частично заполненной капиллярной идеальной жидкостью (задача Вадиаа Али — Н.Д.Копачевского, см. [12]). В плоской задаче здесь  $x > 0$  может быть произвольным положительным числом.

д) Тяжелая либо капиллярная идеальная жидкость в равномерно вращающемся сосуде (задача Н.Д.Копачевского):  $K \neq 0, V \geq 0$ .

е) Стратифицированная идеальная жидкость в частично заполненном сосуде (задача Н.Д.Копачевского и А.Н.Темнова [13]):  $K = 0, V \geq 0$ .

ж) Неоднородная идеальная жидкость в равномерно вращающемся сосуде (задача Н.Д.Копачевского и С.И.Смирновой [14]):  $K \neq 0, V \geq 0$ .

з) Другие задачи: контейнер с жидкостью и с упругим дном или упругими днищами-перегородками (Нго Зуй Кан, А.В.Андронов, Н.Д.Копачевский); контейнер с жидкостью, ограниченной упругой мембраной или системой мембран (Н.Д.Копачевский, Ю.С.Пашкова); маятник с полостью, заполненной системой из несмешивающихся тяжелых жидкостей (Нго Зуй Кан, Вадиаа Али, Н.Д.Копачевский).

2.0 Диссипативные системы:  $F > 0$ .

а) Тяжелая вязкая жидкость в частично заполненном сосуде (задача С.Г.Крейна):  $F \gg 0, V \geq 0, K = 0$ .

б) Вращающаяся тяжелая вязкая жидкость в частично заполненном сосуде (задача Н.Д.Копачевского):  $F \gg 0, V \geq 0, K \neq 0$ .

в) Вязкая стратифицированная жидкость в полностью заполненном неподвижном сосуде (задача Н.Д.Копачевского и А.Н.Темнова):  $F \gg 0, V \geq 0$ .

г) Маятник с полостью, частично заполненной вязкой тяжелой либо капиллярной жидкостью (Нго Зуй Кан, Е.Д.Володкович, Н.Д.Копачевский, Вадиаа Али):  $F \gg 0, V \geq \gamma I, 0 \leq \dim V_- < \infty, K = 0$  или  $K \neq 0$ .

3.0 Частично диссипативные гидросистемы:  $F \geq 0$ , причем  $F > 0$  на некотором подпространстве бесконечной размерности.

а) Колебания двуслойной гидросистемы "вязкая жидкость-идеальная жидкость" в неподвижном сосуде (Н.Д.Копачевский, И.М.Клинчин):  $K = 0, B \geq 0$ .

б) Колебания вращающейся частично диссипативной гидросистемы (Н.Д.Копачевский):  $K \neq 0, B \geq \gamma I, \gamma \in \mathbb{R}$ .

## §2. Вязкоупругие гидросистемы.

1. **Постановка задачи.** В сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения Вольтерра вида

$$\frac{du}{dt} + A_1 u + \sum_{k=2}^m \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s) ds = f(t), u(0) = u^0 \quad (2.1)$$

Здесь  $u = u(t)$  — искомая функция со значениями в  $H$ ,  $\gamma_k$  — положительные постоянные:

$$0 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m < \infty \quad (2.2)$$

$f(t)$  — заданная функция со значениями в  $H$ ,  $u^0 \in H$ .

Через  $A_k (k = \overline{1, m})$  в (2.1) обозначены (вообще говоря) неограниченные линейные операторы, заданные на плотных в  $H$  множествах  $D(A_k)$ , их свойства будут уточнены ниже.

Отметим, что к задаче вида (2.1) приводится начально-краевая задача о малых движениях вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде [15]. При этом  $H = J_0(\Omega)$  (см. [11]),  $m = 2$ , а операторы  $A_1$  и  $A_2$  совпадают между собой и равны известному оператору Стокса  $A_0 = -P_0 \Delta$ , возникающему в проблеме малых движений однородной жидкости в сосуде [16].

2. **Теорема о коррективной разрешимости. Самосопряженный случай.** Будем считать, что для операторов  $A_k$  из (2.1) выполнены условия

$$D(A_k) = D(A_1) (k = \overline{2, m}) \quad 0 < A_k^{-1} \in G_\infty (k = \overline{1, m}) \quad (2.3)$$

т.е. операторы  $A_k$  являются сходными.

Введем в (2.1) новые искомые функции

$$u_1(t) = u(t), \quad u_k(t) = \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{-1} u(s) ds \quad (k = \overline{2, m}) \quad (2.4)$$

Если  $u(t)$  — решение задачи (2.1), т.е. является непрерывно дифференцируемой функцией  $t$  и при каждом  $t$  принадлежит  $D(A_1) = D(A_k)$ , то функции (2.4) непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{du_k}{dt} = A_k^{-1} u_1(t) - \gamma_k u_k(t), \quad u_k(0) = 0, \quad k = \overline{2, m} \quad (2.5)$$

Вместе с (2.1) соотношения (2.5) приводят к задаче Коши в пространстве

$$\tilde{H} = \bigoplus_{k=1}^m H_k, H_k = H :$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{dt} + A\tilde{u} &= \tilde{f}(t), & \tilde{u}(0) &= \tilde{u}^0, \\ \tilde{u}(t) &= (u_1(t); \dots; u_m(t))^t, & \tilde{f}(t) &= (f(t); 0; \dots; 0)^t, & \tilde{u}^0 &= (u^0; 0; \dots; 0)^t, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где матричный оператор  $A$  размером  $m \times m$  при любом  $m \geq 2$  в блочной форме представлен в виде

$$\begin{aligned} A &= (A_{ij})_{i,j=1}^m, & A_{1i} &= A_1, & A_{12} &= (A_2^{\frac{1}{2}}; \dots; A_m^{\frac{1}{2}}), \\ A_{2i} &= (-A_2^{\frac{1}{2}}; \dots; -A_m^{\frac{1}{2}})^t, & A_{22} &= \text{diag}(\gamma_k I)_{k=2}^m \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из свойств (2.7) следует, что оператор  $A$ , заданный на плотном в  $\tilde{H}$  множестве

$$D(A) = D(A_1) \oplus \left( \bigoplus_{k=2}^m D(A_k^{\frac{1}{2}}) \right), \quad D(A_k^{\frac{1}{2}}) = D(A_1^{\frac{1}{2}}),$$

является максимальным диссипативным оператором и

$$\text{Re}(A\tilde{u}, \tilde{u})_{\tilde{H}} \geq c \|\tilde{u}\|_{\tilde{H}}^2, \quad c = \min(\lambda_1(A_1); \min_k \gamma_k) > 0 \quad (2.8)$$

Следствием этих свойств является такое утверждение.

**Теорема 2.1.** Пусть в задаче (2.1) выполнены условия (2.2), (2.3),

$$f(t) \in C([0, T]; H), u^0 \in D(A_1) \quad (2.9)$$

Тогда эта задача имеет единственное решение, для которого  $u(t) \in D(A_1)$  при любом  $t \in [0, T]$ ,  $u^t(t) \in C([0, T]; H)$  и непрерывны все слагаемые, входящие в (2.1).

Доказательство теоремы (2.1) основано на применении теории полугрупп [8] к уравнению (2.6) и свойстве (2.8).

**3. Свойства решений спектральной задачи.** Рассмотрим решения однородной задачи (2.6), зависящие от  $t$  по закону  $\tilde{u}(t) = \tilde{u} \exp(-\lambda t)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{H}$ . Для амплитудных элементов  $\tilde{u}$  приходим к задаче

$$A\tilde{u} = \lambda\tilde{u}, \quad \tilde{u} \in D(A) \subset \tilde{H} \quad (2.10)$$

на собственные значения для оператора  $A$ .

Исследование этой задачи с использованием теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой приводит к следующим выводам.

**Теорема 2.2.** Пусть для операторов  $A_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) кроме условий (2.3) выполнены дополнительные условия

$$0 < c_k \leq \frac{\|A_k^{\frac{1}{2}}\|_{\mathbb{H}}^2}{\|A_1^{\frac{1}{2}}u\|_{\mathbb{H}}^2} \leq d_k < \infty, \quad (2.11)$$

$$k = \overline{2, m}, u \in D(A_1^{\frac{1}{2}})$$

Тогда решения спектральной задачи (2.10) обладают следующими свойствами.

1.0 Спектр задачи (2.10) симметричен относительно вещественной оси и расположен в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \geq c > 0$ , где  $c$  определена в (2.8).

2.0 Задача (2.10) имеет не более конечного числа незначительных собственных значений.

3.0 Предельный спектр задачи (2.10) совпадает с предельным спектром оператора

$$B = A_{22} + A_{12}^* A_{11}^{-1} A_{12} \gg 0, \quad B \in L(\mathbb{H}^{n-1}), \quad (2.12) \quad \text{где } A_{1k} \text{ определены в (2.7).}$$

4.0 В области  $\lambda \notin \sigma(B)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , спектр задачи (2.10) дискретен и может иметь в качестве предельных точек для (конечнократных) собственных значений точку  $\lambda = +\infty$ , а также точки множества  $\sigma(B)$ . При этом к точкам  $\sigma(B)$  ветви собственных значений дискретного спектра могут подходить лишь по вещественной оси.

5.0 Если в задаче (2.10) выполнены условия

$$A_k = \alpha_k A_1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{2, m} \quad (2.13)$$

что соответствует при  $m = 2$  случаю вязкоупругой жидкости, то эта задача имеет дискретный спектр, состоящий из  $m - 1$  серий собственных значений  $\lambda_n^{(k)} \rightarrow \beta_k (n \rightarrow \infty, k = \overline{2, m})$  и серии  $\lambda_n^{(\infty)} \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ . Здесь  $\beta_k$  — бесконечнократные собственные значения оператора  $B$  со свойствами  $0 < \gamma_2 < \beta_2 < \dots < \gamma_m < \beta_m < \infty$ , являющиеся нулями функции  $1 + \sum_{k=2}^m \alpha_k / (\gamma_k - \lambda) = f_0(\lambda)$ .

Более детальную структуру спектра задачи (2.10) при дополнительных предположениях устанавливает

**Теорема 2.3.** В условиях теоремы 2.2 в задаче (2.10) при  $m = 2$  можно так подобрать коммутирующие операторы  $A_1$  и  $A_2$ , что весь спектр оператора  $B$  будет являться предельным спектром и совпадет с отрезком  $[\gamma_2 + 1, \gamma_2 + 2]$ ; при  $m = 3$ ,  $\gamma_2 = \gamma_3$  можно так подобрать коммутирующие между собой операторы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , что спектр оператора  $B$  будет являться его предельным спектром и совпадет с множеством  $\gamma_2 \cup [\gamma_2 + 2, \gamma_2 + 4]$ .

Доказательство теоремы 2.3 получено совместно с Т.Я.Азизовым. Из нее следует, в частности, что общая структура спектра задачи (2.10) может быть достаточно сложна. Уточнение этих свойств дает

**Теорема 2.4.** Имеют место следующие утверждения.

1. Пусть операторы  $A_k$  имеют структуру

$$A_k = \alpha_k A_1 + C_k, \quad C_k = A_1^{\frac{1}{2}} F_k A_1^{\frac{1}{2}}, \quad F_k \in G_{\infty}, \quad k = \overline{2, m} \quad (2.14)$$

и выполнены условия:

а) операторы  $\tilde{A}_{1k} := \sum_{k=2}^m F_k / (\beta_k - \gamma_k) + \beta_k A_1^{-1}$  ( $k = \overline{2, m}$ ) бесконечномерны;

б)  $\tilde{A}_k := I - [f'_0(\beta_k)]^{-1} T_k \gg 0$ ,  $T_k := A_1^{-1} - \sum_{k=2}^m F_k / (\beta_k - \gamma_k)^2$ .

Тогда спектр задачи (2.10) дискретен и может быть разбит на  $m$  серий положительных собственных значений с предельными точками  $\beta_k$ ,  $k = \overline{2, m}$  и  $+\infty$ , где числа  $\beta_k$  — те же, что и в свойстве 5.0 теоремы 2.2.

2.0 Пусть выполнены условия 1.0,  $\text{Ker } \tilde{A}_{1k} = \{0\}$  ( $k = \overline{2, m}$ ), собственные значения  $\lambda_j(A_1)$  оператора  $A_1$  имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_j(A_1) = a_1^{-1/\delta_1} j^{1/\delta_1} [1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty, a_1 > 0, \delta_1 > 0)$$

а собственные значения операторов  $\tilde{A}_{1k}$  — асимптотическое поведение

$$\lambda_j^\pm(\tilde{A}_{1k}) = \pm (a_k^\pm)^{1/\delta_k} j^{-1/\delta_k} [1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty, a_k^\pm > 0, \delta_k^\pm > 0, k = \overline{2, m}).$$

Тогда ветвь  $\lambda_j^{(\infty)}$  имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{(\infty)} = \lambda_j(A_1) [1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty);$$

а каждая из ветвей  $\{\lambda_n^k\}$  с предельными точками  $\beta_k$  ( $k = \overline{2, m}$ ) может быть разбита на две подветви  $\{\lambda_n^{k,\pm}\}_{j=1}^\infty$ , расположенные справа и слева от  $\beta_k$  и имеющие асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{k,\pm} = \beta_k + \lambda_j^\pm(\tilde{A}_{1k}) (f'_0(\beta_k))^{-1} [1 + o(1)] \quad (j \rightarrow \infty, k = \overline{2, m})$$

Отметим еще одно свойство решений задачи (2.10), полученное при участии Г.Я.Азизова.

**Теорема 2.5** В задаче (2.10) в условиях теоремы 2.2 можно выделить ветвь положительных собственных значений  $\{\lambda_n^\infty\}_{n=1}^\infty$  с предельной точкой  $+\infty$ , этой ветви отвечают проекции на  $N$  собственных элементов, образующие базис Рисса с конечным дефектом в пространстве  $N$ . Если выполнено условие  $A_1^{-1} \in G_{p_1}$ , то указанный базис является (см.[17])  $p$ -базисом (с конечным дефектом) в  $N$  при  $p \geq 2p_1$ .

**4. Теорема о корректной разрешимости. Несамосопряженный случай.** Вернемся к задаче (2.1) и будем считать, что выполнены условия (2.2), а взамен (2.3) — условия

$$D(A_k) \supset D(A_1), \quad k = \overline{2, m}, \quad 0 < A_1^{-1} \in G_\infty, \tag{2.14}$$

$$\|A_k u\| \leq c_k \|A_1 u\|, \quad \forall u \in D(A_1).$$

**Теорема 2.6.** Пусть выполнены условия (2.14) и (2.9). Тогда справедливы утверждения теоремы 2.1.

Доказательство этой теоремы основано на переходе от (2.1) к интегральному уравнению Вольтерра и использовании принципа сжимающих отображений.

Очевидно, теорема 2.6 является обобщением теоремы 2.1 на случай, когда операторы  $A_k$  ( $k = \overline{2, m}$ ) не обязательно самосопряженные, в частности, для них не требуется выполнение условий (2.11).

### §3. Релаксирующие гидросистемы.

**1. Постановка задачи.** Движение жидкости, обладающей свойством релаксации, определяется полями скорости, давления и плотности не только в данный момент времени, но и поведением этих полей во все время движения до этого момента: релаксирующие жидкости обладают "памятью", учитывающей предысторию движения.

Так, поле плотности идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей некоторую область  $\Omega$ , в простейшем случае является решением интегродифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \Delta(a^2(x)u) + b \Delta \int_0^t e^{-\delta(t-s)} u(s, x) ds = f(t, x), \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

где  $a^2(x)$  — квадрат скорости звука,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $\delta > 0$ , а  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Обобщая эту ситуацию, рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  задачу Коши для интегродифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + A^1 u + \sum_{k=2}^m \int_0^t \exp(-\gamma_k(t-s)) A_k u(s) ds = f(t), \quad (3.2)$$

$$u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \gamma_k > 0 \quad (k = \overline{2, m}).$$

Будем считать, что операторы  $A_k$  ( $k = \overline{2, m}$ ) обладают следующими свойствами

$$A_1 \gg 0, \quad 0 < A_1^{-1} \in G_\infty, \quad D(A_k) \supset D(A_1) \quad (k = \overline{2, m}), \quad (3.3)$$

$$\|A_k u\| \leq c_k \|A_1 u\| \quad (\forall u \in D(A_1), c_k > 0, (k = \overline{2, m}))$$

Отметим, что если все  $A_k = 0$  ( $k = \overline{2, m}$ ), то (3.2) переходит в хорошо исследованную задачу Коши для гиперболического уравнения.

**2. Теорема о коррективной разрешимости.** Доказательство формулируемой ниже теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши (3.2) проводится по тому же плану, который был использован в работе [18] для случая  $m = 2$ ,  $A_2 = a_2 A_1$ ,  $a_2 > 0$ .

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия (3.3) и условия

$$u^0 \in D(A_1), \quad u^1 \in D(A_1^{\frac{1}{2}}), \quad f(t) \in C'([0, T]; H). \quad (3.4)$$

Тогда задача (3.2) имеет единственное решение на отрезке  $[0, T]$ .

Если условия (3.4) не выполнены, то при более слабых ограничениях можно установить существование обобщенного решения задачи (3.2).

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия (3.3) и условия

$$u^0 \in H, \quad u^1 \in (H_{A_1})^*, \quad f(t) \in C([0, T]; (H_{A_1})^*) \quad (3.5)$$

Тогда задача (3.2) имеет единственное обобщенное решение, т.е. непрерывную функцию  $u(t)$ , являющуюся решением интегрального уравнения Вольтерра

$$u(t) = \cos\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right) u^0 + \sin\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right) \left(A_1^{-\frac{1}{2}} u^1\right) + \int_0^t \sin\left[(t-s) A_1^{\frac{1}{2}}\right] A_1^{-\frac{1}{2}} f(s) ds - \\ - \sum_{k=2}^m \int_0^t U_k(t-s) (A_1 + \gamma_k^2 I)^{-1} A_k u(s) ds, \quad (3.6)$$

$$U_k(t) = \exp(-\gamma_k t) I - \cos\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right) + \gamma_k \sin\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right) A_1^{-\frac{1}{2}},$$

равносильного задаче (3.2).

**3. Нормальные колебания релаксирующей жидкости в ограниченной области.** Рассмотрим уравнение (3.1) при граничном условии Дирихле

$$u = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \quad (3.7)$$

на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Введя оператор

$A_0 u = -\Delta u$ ,  $u \in D(A) = \overset{0}{W}_2(\Omega) \simeq \overset{0}{H}(\Omega)$ , приходим к выводу, что  $A \gg 0$ ,  $0 < A^{-1} \in G_\infty$ , если  $H = L_2(\Omega)$ .

Осуществляя в (3.1) замену

$$v(t, x) = \int_0^t b e^{-\delta(t-s)} u(s, x) ds, \quad (3.8)$$

полагая  $f(t) \equiv 0$  и рассматривая решения вида  $v(t, x) = e^{-\lambda t} v(x)$ , приходим к спектральной задаче вида

$$L(\lambda)v = (\lambda^2(1 - \tau\lambda)A_0 - \tau\lambda I + B)v = 0, \\ A_0 v = (a_\infty^{-1}(x))A^{-1}(a_\infty^{-1}(x))v, \quad Bv = \alpha(\tau, x)v, \quad (3.9)$$

$$\alpha(\tau, x) = 1 - \tau\gamma(x), \quad \gamma(x) = b/a_\infty^2(x) > 0, \quad \tau = 1/\delta > 0$$

**Лемма 3.1.** Если функция  $a_\infty^{-1}(x)$  положительна и непрерывна в  $\bar{\Omega}$ , то оператор  $A_0$  положителен и компактен в  $L_2(\Omega)$ , его собственные значения имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_0) = \left( \frac{1}{6\pi} \int_\Omega a_\infty^{-3}(x) dx \right)^{2/3} k^{-2/3} [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.10)$$

**Лемма 3.2.** Пусть выполнены естественные с физической точки зрения условия  $0 < \alpha(\tau, x) < 1$ , а  $\gamma_- = \inf\{\gamma(x), x \in \bar{\Omega}\}$ ,  $\gamma_+ = \sup\{\gamma(x), x \in \bar{\Omega}\}$ . Если  $a_\infty^{-2}(x)$  непрерывна и положительна в  $\bar{\Omega}$ , то оператор  $B$  самосопряжен и положителен в  $H$ , причем  $\sigma(B) = [\alpha_-(\tau), \alpha_+(\tau)]$ ,  $\alpha_\pm(\tau) = 1 - \tau\gamma_\mp$ . Если  $a_\infty(x) = a = \text{const}$ , то отрезок спектра смыкается в точку.

**Теорема 3.3.** Для решений задачи (3.9) имеют место следующие свойства.

1.0 Отрезок  $\Delta_\tau = [\alpha_-(\tau)/\tau, \alpha_+(\tau)/\tau]$  является предельным спектром задачи (3.9); вне этого отрезка задача имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси, с возможными предельными точками на указанном отрезке и точки  $\lambda = +\infty$ .

2.0 Вещественный спектр задачи расположен на промежутке  $[\alpha_-(\tau)/\tau, 1/\tau]$  и потому на промежутке  $(\alpha_+(\tau)/\tau, 1/\tau)$  может быть не более счетного множества собственных значений  $\{\lambda_k^0\}$  с возможными предельными точками на отрезке  $\Delta\tau$ . Если время релаксации настолько мало, что  $0 < \tau \leq 1/(3\gamma_+)$ , то не вещественные собственные значения задачи (3.9) не могут иметь в качестве предельных точки отрезка  $\Delta\tau$ , т.е. предельного спектра задачи.

**Теорема 3.4.** Имеют место следующие свойства.

1.0 Задача (3.9) имеет две ветви не вещественных собственных значений  $\{\lambda_k^\pm\}$ , расположенных в полосе  $\tau/(2\lambda_1(A_0)) < \text{Re } \lambda < 2/(3\tau)$  и имеющих асимптотическое поведение

$$\lambda_k^\pm = \pm i (\lambda_k(A_0))^{-1/2} [1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.11)$$

2.0 Система элементов вида  $\left\{ \left( v_{kq}^\pm; i \lambda_k^\pm A_0^{\frac{1}{2}} v_{kq}^\pm \right)^t \right\}$ , отвечающая собственным значениям  $\lambda_k^\pm$  и собственным и присоединенным элементам  $v_{kq}^\pm$  задачи (3.9), имеет не более конечного дефекта в гильбертовом пространстве  $(L_2(\Omega))^2$ .

3.0 Если параметры задачи (3.9) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0) < \tau, \quad 1 - \tau\eta_- < 0, \quad \tau^2 + \lambda_1(A_0) - 6\tau\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0) + 4\tau^2\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0)\eta_- > 0,$$

то упомянутая выше система элементов полна в  $(L_2(\Omega))^2$ .

4.0 Для вещественных собственных значений  $\lambda_k^0$  задачи (3.9), расположенных на промежутке  $(\alpha_+(\tau)/\tau, 1/\tau)$ , имеют место двусторонние оценки

$$\delta_k^- / \tau \leq \lambda_k^0 \leq \delta_k^+ / \tau, \quad k \in N,$$

где  $\delta_k^\pm$  — корни уравнений

$$\lambda_k(A_0) x^2(1-x) = (x - \alpha_\pm(\tau)) \tau^2,$$

расположенные на промежутке  $(\alpha_+(\tau), 1)$ .

Как следует из утверждений теорем 3.3 и 3.4, в релаксирующей жидкости с переменной скоростью звука существуют два типа волновых движений: акустическо-релаксационные волны, близкие к обычным акустическим волнам, и чисто релаксационные волны.

Отметим в заключение, что теоремы 2.6 и 3.1 допускают обобщение на случай интегродифференциальных уравнений в банаховом пространстве с интегральными операторами Вольтерра, ядра которых зависят от разности аргументов. В задаче (3.2) при этом используется

косинус-оператор функция, являющаяся операторным обобщением тригонометрического косинуса [19,20].

Отметим также, что результаты §1 получены Н.Д.Копачевским и Ю.С.Пашковой, а §2 и §3 — Н.Д.Копачевским и Л.Д.Орловой (Болговой).

Авторы благодарят Т.Я.Азизова за обсуждение результатов и сотрудничество по некоторым вопросам, рассмотренным в этой работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. E.E.Zayas. The Kelvin Chetaev theorem and extensions J.Austronaut.Sci X I 1964 2 46—49
2. W.Tomson (Lord Kelvin) and P.G.Tait. Treatise on natural philosophy. Part 1, Kembridge University Press, 1921.
3. Н.Г.Четаев. Устойчивость движения.- М: Наука, 1960.
4. А.И.Милославский. Обоснование спектрального подхода в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости //Функциональный анализ и его приложения. — Т.17, 1983.- N 3.-С.83—84.
5. В.Н.Пивоварчик. О спектре квадратичного операторного пучка в правой полуплоскости // Матем.заметки.— Т.45, 1989.
6. В.Н.Пивоварчик. О спектре некоторых квадратичных пучков неограниченных операторов // Функциональн. анализ и его приложения.—Т.23, 1989.- N 1
7. В.Н.Пивоварчик. Об общей алгебраической кратности спектра в правой полуплоскости для некоторого класса квадратичных операторных пучков // Алгебра и анализ.— Т.3, 1991.- Вып.2.
8. С.Г.Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М: Наука, 1967.- 464 с.
9. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- М: Наука, 1965.—448 с.
10. А.С.Маркус. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.- Кншинев: Штиинца, 1986.- 260 с.
11. Н.Д.Копачевский, С.Г.Крейн, Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике // М: Наука, 1989.- 416 с.
12. Вадиаа Али. Применение методов спектрального анализа оператор-функций в задаче о колебаниях маятника с полостью, заполненной жидкостью .—Канд.дисс., Симферополь, СГУ, 1994.-205с.
13. Н.Д.Копачевский, А.Н.Темнов. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.— Т.26, 1986.- N 5.- 734—755 с.
14. С.И.Смирнова. Малые движения и собственные колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости.—Канд. дисс., Симферополь, СГУ, 1994.- 140 с.
15. А.И.Милославский. Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // Докл. АН СССР.— Т.309, 1989.- N 3.- 532-536 с.
16. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.- М:Наука, 1970.- 288 с.
17. В.А.Пригорский. О некоторых классах базисов гильбертова пространства УМН. - Т.20, 1965.- N 5.- Вып.125.- 231—236 с.
18. R.K.Miller, R.L.Wheeler. Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces//Funkcialaj Ekvacioj.- V.21, 1978.- 279—305 pp.
19. M.Sova. Cosine operator functions // Rosprawy Matematyczne.-V.49, 1966.- 1-47
20. U.O.Fattorini. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces North-Holland.- 1985.
21. М.Ю.Царьков. Об операторном подходе в задачах гидродинамики // Депонировано в ГНТБ Украины 06.04.94, N 645—Ук 94.- 12с.