

## УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ № 2 (41)

СИМФЕРОПОЛЬСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Математика. Физика. Химия. Биология.  
Физическая культура.СИНТЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ  
ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

В.И.Донской, доктор физико-математических наук, профессор

Введение

Пусть  $X$  - произвольное множество альтернатив, в котором полагаются существующими подмножества, называемые множеством допустимых альтернатив  $X$  и множеством наилучших альтернатив  $\{x^*\}$ , такие, что  $\{x^*\} \subset X \subset X$ . Предполагается, что все элементы в  $\{x^*\}$  равноценны по некоторому целевому критерию выбора. Подмножество  $\{x^*\}$ , способ его выявления и даже само множество  $X$  не заданы полностью: существует лишь некоторая информация  $I_0 = I_0(X, \{x^*\})$ , на основе которой формулируется задача  $D$ : используя информацию  $I_0$ , отыскать в  $X$  множество наилучших альтернатив  $\{x^*\}$  или хотя бы один из элементов этого множества.

Пусть  $\{I\} = \{I(X), \{x^*\}\}$  - множество различных информаций; элементы множества  $\{I\}$  будем обозначать символами  $I_0, I_1, \dots$ . Пространством возможных информаций  $J$  будем называть замыкание множества  $\{I\}$  относительно любого числа объединений и пересечений его элементов.

Множество всех альтернатив  $X$  таких, что наличие информации  $I_0$  влечет истинность предиката " $x \notin \{x^*\}$ " обозначим  $\overline{\mathfrak{R}}_0$ ; множество  $\mathfrak{R}_0 = X \setminus \overline{\mathfrak{R}}_0$  назовем исходной областью неопределенности выбора альтернатив в задаче  $D$ ; любое множество  $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_0$  назовем областью неопределенности.

Решение задачи  $D$  предполагает синтез алгоритма  $A$ , реализующего отображение

$$A: J \rightarrow 2^X,$$

где  $2^X$  - булеан множества  $X$ . Будем обозначать  $\{A\}$  - множество любых таких алгоритмов и  $A_0, A_1, \dots$  - его произвольные элементы.

Алгоритм  $A$  называется точным на информации  $I \in J$ , если  $A(I) \subseteq \{x^*\}$  и абсолютно точным, если  $A(I) = \{x^*\}$ . Если для информации  $I$  найдется точный (абсолютно точный) алгоритм  $A \in \{A\}$ , то эта информация называется полной (абсолютно полной). В противном случае информация  $I$  называется неполной, и речь идет о неполных данных.

Алгоритм  $A$  называется согласованным с информацией  $I$  для задачи  $D$ , если  $\{x^*\} \subseteq A(I) \subseteq \mathfrak{R}_0$ . Если к задаче  $D$  применен согласованный алгоритм  $A$ , то получено множество  $\mathfrak{R}_A = A(I_0)$  такое, что  $\{x^*\} \subseteq \mathfrak{R}_A$ . Полученное соотношение есть ни что иное, как некоторая информация о множестве  $\{x^*\}$ , которую обозначим  $I_A$ . Эта инфор-

мация, вообще говоря, может пополнить исходную информацию  $I_0$  и позволить далее располагать информацией  $\hat{I}_0 = I_0 \cup I_A$ .

Пусть имеется начальная информация  $I_0 \in J$ . Любую информацию  $I_1 \in J$  будем называть дополнительной, если  $I_0 \neq I_1 \neq \emptyset$ . Дополнительная информация  $I_1$  называется сужающей, если найдется такой согласованный алгоритм  $A_1 \in \{A\}$ , что выполняются включения:  $A(I_0) \supset A_1(\hat{I}_0 \cup I_1) \supseteq \{x^*\}$ , где  $A$ - произвольный согласованный алгоритм.

Последовательный процесс сужения области неопределенности при решении задачи  $D$  с исходной информацией  $I_0$  состоит в нахождении такой последовательности дополнительных информаций  $I_1, \dots, I_k$  и синтеза таких алгоритмов  $A_0, A_1, \dots, A_k$ , что

$$A_0(I_0) \supset A_1(\hat{I}_0 \cup I_1) \supset \dots \supset A_k(\hat{I}_{k-1} \cup I_k) \supseteq \{x_k^*\}.$$

Принцип наибольшего сужения области неопределенности в случае конечных дискретных множеств предполагает использование дополнительной информации и выбор алгоритмов так, чтобы мощность множества  $\{\mathfrak{R}_{j-1} \setminus \mathfrak{R}_j\}$  была как можно большей,  $\mathfrak{R}_j = A_j(\hat{I}_{j-1} \cup I_j)$ ,  $j = \overline{1, k}$ .

В данной статье рассматривается класс задач дискретной оптимизации, для которых имеются неполные данные о некоторых компонентах модели

$$\text{extr } f(\tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega \subset B^n; B^n = \{0, 1\}^n;$$

$$f: B^n \rightarrow R; \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n).$$

Иначе говоря, предполагается существование функции  $f$  и непустого множества  $\Omega$ , которые задаются некоторой неполной информацией  $I_0 = I_0(f, \Omega)$ . Нахождение по этой информации  $I_0$  решения

$$\{x^*\} = \text{arg extr } f(\tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega$$

и является решаемой задачей.

### 1. Принципы синтетического подхода.

Существуют разнообразные практические постановки задач дискретной оптимизации с неполной информацией, и применяемые подходы к решению зависят от того, как эта информация представлена.

Целевая функция  $f$  может быть частично задана в некоторых точках-вершинах единичного  $n$ -мерного куба  $B^n$ . Может быть частично задано отношение предпочтения:

$$\rho_\Delta \subset \rho \stackrel{\Delta}{=} \{(\tilde{x}, \tilde{y}), f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{y})\}.$$

Множество  $\Omega$  может быть представлено набором прецедентов  $\{M_0 \cup M_1\}$  таким, что точно известно:  $M_0 \subset \Omega$ ,  $M_1 \subset \{B^n \setminus \Omega\}$ . В этом случае для восстановления множества обычно применяют методы эмпирической индукции (распознавание образов) [1]. Возможно частичное задание множества  $\Omega$  некоторой логической системой продукций [2], определяющей алгоритмы вычисления истинности предиката  $g_0(\tilde{x}) \equiv " \tilde{x} \in \Omega "$  на некотором подмножестве  $M_0 \subset \Omega$  и  $g_1(\tilde{x}) \equiv " \tilde{x} \notin \Omega "$  на подмножестве  $M_1 \subset \{B^n \setminus \Omega\}$ .

Дискретные модели оптимизации с неполной исходной информацией представляют подкласс моделей принятия решений, и их изучение и создание соответствующих численных методов имеют важное значение для развития информационных систем поддержки принятия решений и проблематики искусственного интеллекта.

С целью существенного продвижения вперед в области построения дискретных моделей принятия решений, удовлетворения потребностей разработчиков интеллектуализированных систем в информатике, повышения точности и обоснованности решений разработан синтетический подход, основные принципы которого состоят в следующем.

1. Соединение, комбинирование методов принятия решений, использующих различную исходную информацию, существенно дополняющих друг друга, например, эмпирической индукции и дедуктивного вывода на основе баз знаний.

2. Принятие решений на основе синтеза и сопоставления логических описаний областей истинности заключений, построенных различными методами.

3. Привлечение разнообразной дополнительной информации, обеспечивающей наибольшее сужение области неопределенности, выявление и использование для этой цели математических свойств моделей решений - дискретности, линейности, монотонности, соответствия определенной структуре (например, матричной) и т.п.

4. Комбинирование математических методов, привлечение для выбора альтернатив разнообразного математического аппарата, совместно используемого при решении задачи, например, теории игр и минимизации дизъюнктивных форм, методов оптимизации и распознавания образов.

## 2. Каноническое представление задачи.

Обозначим класс псевдодобулевых функций  $PS_2(n) \triangleq \{f: B^n \rightarrow R\}$ .

Определение 2.1. Две формы представления оптимизационной задачи называются эквивалентными, если множества их решений в точности совпадают.

Теорема 2.1. [3]. Для любой задачи условной оптимизации в форме

$$\text{extr } f(\tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega, \tilde{x} \in B^n, \quad (2.1)$$

существуют эквивалентные формы представления:

$$\text{а) } \text{extr } f(\tilde{x}) / h(\tilde{x}) \leq 0, \tilde{x} \in B^n, \quad (2.2)$$

с единственным ограничением в виде нестрогого неравенства, где есть некоторый полином, и

$$\text{б) } \text{extr } f(\tilde{x}) / \prod_{j=1}^m x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \dots \& x_{j_r}^{\sigma_{j_r}} = 1, \quad (2.3)$$

где  $x^\sigma = x$ , если  $\sigma = 1$ ,  $x^\sigma = \bar{x}$ , если  $\sigma = 0$ .

Представление задачи (2.1) в форме (2.3) будем называть каноническим. Это представление имеет ограничение в виде логического уравнения с дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) в левой части. Такое ограничение называется дизъюнктивным или ДНФ-ограничением.

Каноническое представление задачи (2.3) имеет большое значение для реализации синтетического подхода. В частности, ДНФ-ограничение может быть синтезировано и при помощи индуктивного обобщения неполной информации о прецедентах, и путем построения логического описания области выводимости факта "быть допустимым решением".

Далее приводятся конкретные способы реализации синтетического подхода к решению дискретных задач оптимизации с неполной информацией.

## 3. Сужение области неопределенности на основе дополнительной информации о линейности задачи

Задачи вида

$$\begin{cases} \max x \sum_{i=1}^n a_i x_i / \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i \leq B_j; j = \overline{1, m} \\ x_i \in \{0,1\}; a_i \geq 0; B_j \geq 0; b_{ij} \geq 0; i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.1)$$

называются задачами линейного булевого программирования с неотрицательными коэффициентами.

Зададим функции алгебры логики (ф.а.л.)  $F_j(\tilde{x})$ ,  $j = \overline{1, m}$ , так, что

$$(F_j(\tilde{x}) = 0) \Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i - B_j \leq 0 \right).$$

Тогда  $F_j$  - монотонные ф.а.л. [1]; функция

$$F_0(\tilde{x}) = \bigvee_{j=1}^m F_j(\tilde{x})$$

также является монотонной и описывает область допустимых решений  $\Omega$  в задаче (3.1):  $\Omega = \{ \tilde{x} \in B^n : F_0(\tilde{x}) = 0 \}$ .

Теперь рассмотрим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max x \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ \text{при условии, что заданы подмножества} \\ M_0^f \subset M_0^{F_0}; M_1^f \subset M_1^{F_0} \\ \text{такие, что каждый набор } \tilde{x} \in M_0^f \text{ является} \\ \text{допустимым решением, а каждый набор } \tilde{x} \in M_1^f \\ \text{таким не является;} \\ \tilde{x} \in B^n; a_i \geq 0, i = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

В этой задаче предполагается, что существуют множества  $M_0^{F_0} = \{ \tilde{x} \in B^n : F_0(\tilde{x}) = 0 \}$ ,  $M_1^{F_0} = \{ \tilde{x} \in B^n : F_0(\tilde{x}) = 1 \}$ , но  $F_0(\tilde{x})$  — функция, определяющая допустимые решения задачи, — задана частично указанием множеств наборов  $M_0^f, M_1^f$ , т.е. задана некоторая частичная ф.а.л.

Пусть известно, что задача (3.2.) получена как неполное представление задачи (3.1): например, при исследовании заведомо линейной модели не удалось получить полную информацию о ее ограничениях. В таком случае функция  $F_0(\tilde{x})$  является монотонной ф.а.л., и проблема нахождения множества допустимых решений  $\Omega$  сводится к отысканию монотонной функции  $F_0(\tilde{x})$ .

**Теорема 3.1.** [1] . Функция  $f \in P_2(n)$ , не являющаяся константой, монотонна в том и только в том случае, если для любых пар вершин  $\tilde{x}, \tilde{y} \in B^n$ , в которых  $f(\tilde{x}) = 1$  и  $f(\tilde{y}) = 0$ , найдется переменная с номером  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  такая, что  $x_i = 1$  и  $y_i = 0$ .

**Следствие.** Если во множествах  $M_0^f$  и  $M_1^f$  частичной ф.а.л.  $f$  найдутся такие наборы  $\tilde{\alpha} \in M_0^f$  и  $\tilde{\beta} \in M_1^f$ , что не существует переменной с номером  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , для которой  $\alpha_i < \beta_i$ , то  $f$  не может быть доопределена монотонной функцией.

Пусть  $\Phi \subset P_2(n)$  - класс монотонных функций таких, что для любой функции  $\varphi \in \Phi$  выполняется условие:

$$\left[ \forall \tilde{x} \in M_0^f (\varphi(\tilde{x}) = 0) \right] \wedge \left[ \forall \tilde{x} \in M_1^f (\varphi(\tilde{x}) = 1) \right] \quad (3.3)$$

Очевидно,  $F_0 \in \Phi$ , и произвольная функция  $\varphi \in \Phi$  может отличаться от  $F_0$  только на множестве  $B^n \setminus \{ M_0^f \cup M_1^f \}$ .

Если  $F$  - класс произвольных функций из  $P_2(n)$ , удовлетворяющих условию (3.3), а  $\{x^*\}$  - множество решений задачи (3.1), являющейся "порождающей" для задачи (3.2), то выполняются включения:

$$M_0^F \supset M_0^\Phi \supset \{x^*\} \quad (3.4)$$

$$\text{где } M_0^F = \bigcup_{g \in F} \{\tilde{x} \mid g(\tilde{x}) = 0\}, \quad M_0^\Phi = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\tilde{x} \mid \varphi(\tilde{x}) = 0\}.$$

Соотношения (3.4) доказывают, что дополнительная информация о линейности задачи (3.2) является сужающей, а соответствующий согласованный алгоритм немедленно "выписывается" из условия - критерия теоремы 3.1 и начальной информации о задаче (3.2).

Алгоритм 3.1.

Шаг 1. Для каждого набора  $\tilde{\alpha} \in M_0^f$  выписать конъюнктивную нормальную форму (к.н.ф.)  $K(\tilde{\alpha})$ , каждая дизъюнкция которой состоит из переменных  $\tilde{x}_i$  (с инверсиями) таких, что  $\alpha_i < \beta_i$  для одного из наборов  $\tilde{\beta} \in M_1^f$ ; к.н.ф.  $K(\tilde{\alpha})$  будет содержать  $m_1 = |M_1^f|$  дизъюнкций - ровно столько, сколько наборов содержится во множестве  $M_1^f$ .

Шаг 2. В полученных к.н.ф.  $K(\tilde{\alpha}_1), \dots, K(\tilde{\alpha}_{m_0})$  раскрыть скобки и выполнить операции поглощения, получая д.н.ф.  $D_1, \dots, D_m$ .

Шаг 3. Записать д.н.ф.  $D_1 \vee \dots \vee D_m$  и выполнить все возможные операции поглощения. Будет получена некоторая д.н.ф.  $D^*$ .

Замечание. Выполнение шага 1 в алгоритме с учетом сформулированной теоремы возможно тогда и только тогда, когда информация в задаче (3.2) не противоречит условию монотонности.

Лемма 3.1. Конъюнкции д.н.ф.  $D^*$  перечисляют все альтернативные варианты несокращаемых наборов необходимых нулей в экстремальных решениях  $\{x^*\}$ , удовлетворяющих дополнительной информации о линейности ограничений (монотонности функции  $F_0$ ).

Лемма 3.2.  $\overline{D^*} \in \Phi$ .

Доказательство. Д.н.ф.  $D^*$  содержит только отрицательные литералы, поэтому формула  $\overline{D^*}$  может быть представлена путем очевидных преобразований в виде д.н.ф., содержащей только положительные литералы, и монотонность  $\overline{D^*}$  следует из монотонности конъюнкции, дизъюнкции и замкнутости монотонных ф.а.л. Обозначим

$$M_0^{\overline{D^*}} = \{\tilde{x} \mid \overline{D^*}(\tilde{x}) = 1\}$$

Лемма 3.3.  $M_0^\Phi = M_0^{\overline{D^*}}$ .

Доказательство. Пусть  $\tilde{x} \in M_0^\Phi$ . Тогда  $\forall \varphi \in \Phi$  имеем  $\varphi(\tilde{x}) = 0$ , но  $\overline{D^*} \in \Phi$  по лемме 3.2, поэтому  $\overline{D^*}(\tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow D^*(\tilde{x}) = 1$ , и  $\tilde{x} \in M_0^{\overline{D^*}}$ .

Обратно, пусть  $\tilde{x} \in M_0^{\overline{D^*}}$ , т.е.  $D^*(\tilde{x}) = 1$ . Тогда, по лемме 3.1,  $\tilde{x}$  принадлежит объединению максимальных вне множества  $M_1^f$  интервалов, каждый из которых содержит хотя бы одну точку из  $M_0^f$ , поэтому  $\tilde{x} \in M_0^\Phi$ .

Следствие. Алгоритм 3.1 является согласованным с начальной информацией задачи (3.2), и дополнительная информация о линейности является сужающей:

$$\{\tilde{x}^*\} \subset M_0^{\overline{D^*}} = M_0^\Phi \subset M_0^F = \{B^n \setminus M_1^f\}.$$

Полученная дополнительная информация может быть представлена в виде дизъюнктивного ограничения  $D^*(\tilde{x}) = 1$ , присоединяемого к задаче 3.2.

Множества  $M_0^f$  и  $M_1^f$ , являющиеся частью исходной информации в задаче 3.2, можно рассматривать как стандартную обучающую информацию для задачи распознавания свойства " $\tilde{x} \in \Omega$ " [1].

Решение такой задачи и получение правила классификации в виде д.н.ф.  $D_R$  позволяют обосновать выбор решения  $\tilde{x}$  из множества  $M_0^D$  [1], причем синтезируется каноническое представление задачи с новым дизъюнктивным ограничением  $(D^* \wedge D_R)(\tilde{x}) = 1$ .

4. Анализ начальной информации и условие точного решения задачи в канонической форме с неполной информацией о целевой функции

Ниже изложен синтетический метод решения задачи оптимизации слабоопределенной линейной псевдоболевой функции с дизъюнктивным ограничением, основанный на нахождении при помощи прецедентной начальной информации системы образующих  $\tilde{C} = (C_1, \dots, C_q)$  выпуклого многогранного конуса  $K(\tilde{C}) \subset R^n$ , которому принадлежит неизвестный вектор

$C_0$  коэффициентов линейной целевой функции задачи

$$\max(C_0, \tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega \subset B^n.$$

Область допустимых решений  $\Omega$  предполагается точно заданной дизъюнктивным ограничением

$$\bigvee_{j=1}^m K_j(\tilde{x}) = 1; \quad K_j(\tilde{x}) = x_{j_1}^{\sigma_{j_1}} \& \dots \& x_{j_{r_j}}^{\sigma_{j_{r_j}}};$$

$$\Omega = \left\{ \tilde{x} \in B^n : \bigvee_{j=1}^m K_j(\tilde{x}) = 1 \right\}.$$

Теорема 4.1. Пусть  $C_0 \in K(\tilde{C})$ ,  $C_0 \neq 0$ , и

$$\forall C \in \text{conv}(\tilde{C}) \quad (C, \tilde{x}^*) = \max_{\tilde{x} \in \Omega} (C, \tilde{x})$$

тогда  $(C_0, \tilde{x}^*) = \max(C_0, \tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega$ .

Используя эту теорему и представление множества  $\Omega$  его покрытием

$$\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_j \cup \dots \cup \Omega_m \quad \text{таким, что} \quad (\tilde{x} \in \Omega_j) \Leftrightarrow (K_j(\tilde{x}) = 1), \quad j = \overline{1, m},$$

осуществляется решение  $m$  задач на выпуклой оболочке системы  $\tilde{C}$ :

$$\max \left( \sum_{k=1}^q \lambda_k C_k, \tilde{x} \right) / K_j(\tilde{x}) = 1; \quad \sum_{k=1}^q \lambda_k = 1; \quad \lambda_k \geq 0, \quad k = \overline{1, q}.$$

Использование дополнительной информации о знаках неизвестного вектора  $C_0$  позволяет получить простое правило вычисления булевых векторов  $\tilde{\alpha}_j \in \Omega_j$  таких, что

$$\forall C \in \text{conv}(\tilde{C}) \quad \forall \tilde{x} \in \Omega_j \quad (C, \tilde{\alpha}_j) \geq (C, \tilde{x}).$$

Координаты векторов  $\tilde{\alpha}_j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j)$  определяются по формулам:

$$\alpha_i^j = \begin{cases} \sigma_i, & i \in \{j_1, \dots, j_{r_j}\}, \\ 1, & (i \notin \{j_1, \dots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} > 0), \\ 0, & (i \notin \{j_1, \dots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} < 0), \\ \Delta, & (i \notin \{j_1, \dots, j_{r_j}\}) \& (c_{i0} = 0), \end{cases}$$

$i = \overline{1, p}$ ;  $\Delta$  - произвольное значение из  $\{0, 1\}$ .

Далее рассматриваются задачи

$$\begin{cases} \max \sum_{i=1}^n \alpha_i^j (\lambda_1 C_{1i} + \dots + \lambda_q C_{qi}) \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_q = 1; \lambda_k \geq 0, k = \overline{1, q}; \end{cases} \quad (4.1j) \\ (j = \overline{1, m})$$

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^n \alpha_i^j (\lambda_1 C_{1i} + \dots + \lambda_q C_{qi}) \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_q = 1; \lambda_k \geq 0, k = \overline{1, q}; \end{cases} \quad (4.2j)$$

Экстремумы задач (4.1j) и (4.2j) достигаются в вершинах  $(q-1)$ -мерного симплекса и определяются путем нахождения величин  $B_j = \max_{1 \leq k \leq q} \sum_{i=1}^n \alpha_i^j C_{ki}$ ;

$$A_j = \min_{1 \leq k \leq q} \sum_{i=1}^n \alpha_i^j C_{ki}; j = \overline{1, m}.$$

Найденные величины удовлетворяют неравенствам:  $\forall C \in \text{conv}(\tilde{C});$

$$\left( A_j \leq \max_{\tilde{x} \in \Omega} (C, \tilde{x}) = (C, \tilde{\alpha}_j) \leq B_j \right),$$

из которых с учетом теоремы 4.1 следует, что при выполнении условия

$$\exists j^*: \forall j \neq j^* (A_{j^*} \geq B_j)$$

исходная задача решается точно:  $(C_0, \tilde{\alpha}_{j^*}) = \max(C_0, \tilde{x}) / \tilde{x} \in \Omega$ . В противном случае применяется теоретико-игровой подход к выбору решения, приводящий к решению матричной игры со стратегиями выбора решений  $\tilde{\alpha}_j$  с одной стороны, стратегиями (Природы) выбора образующих  $(C_1, \dots, C_q)$  - с другой и с платежной матрицей

$$\left\| h_{ik} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j C_{ki} \right\|_{m \times q}$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Донской В.И. Слабоопределенные задачи линейного булевого программирования с частично заданным множеством допустимых решений // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1988. Т.28, №9, с. 1379 - 1385.
2. Донской В.И. Логические продукционные системы: анализ и синтез // Кибернетика и системный анализ. 1994, №5, с. 1 - 21.
3. Донской В.И. Задачи псевдобулевой оптимизации с дизъюнктивным ограничением // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 1994. Т. 34, №2, с. 461 - 472.
4. Донской В.И. Дуальные экспертные системы // Изд. Российской АН. Техническая кибернетика. 1993. №5, с. 111 - 119.