

УДК 519.63

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ АМФОР НА ОСНОВЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМ ИХ ВНЕШНИХ ОБРАЗУЮЩИХ

Даниленко В. Н.¹, Петров И. Б.²

¹Кандидат исторических наук

²Московский физико-технический институт, Российская Федерация

E-mail: petrov@mipt.ru

Целью работы является классификация амфор на основе интерполяционного описания их внешних форм. Для такого математического описания предполагается использование интерполяционного полинома, записанного в форме Лагранжа. Показано, что для адекватного описания внешней формы амфоры достаточно использовать полиномы не выше пятой степени. Для классификации амфор используются коэффициенты интерполяционных полиномов и их степень. Данная классификация позволяет проводить численную классификацию, то есть анализ, основанный не только на эмпирическом опыте, но и на объективных численных показателях.

Ключевые слова: математическое моделирование, археология, формы амфор, интерполяция.

Цель классификации амфор по тем или иным признакам состоит в определении места и времени их производства, а также гончарной школы (или мастера). В археологии существует несколько подходов к качественному решению этой задачи, в том числе и опыт археолога. Такой подход, разумеется, может привести к успеху (и часто приводит), однако количественная идентификация гончарного изделия способна подтвердить гипотезу либо послужить экспертизой для такой идентификации. Качественное обоснование предлагаемой гипотезы связано с тем, что, в отличие от декоративной либо столовой керамики, амфоры, использующиеся для перевозки грузов, должны иметь формы, соответствующие следующим критериям:

- удовлетворять способу транспортировки;
- удовлетворять способу хранения;
- удовлетворять условиям компактной упаковки;
- удовлетворять весовым ограничениям и в то же время прочностным требованиям;
- обладать максимально возможной вместимостью при очевидных ограничениях (амфора должна быть подъемной для одного человека); она не может иметь сферическую форму (максимальную по вместимости) вследствие неудобства последней при переноске и неоптимальности суммарного объема при хранении.

Итак, гончар, выражаясь современным языком, должен был решать задачу условной оптимизации при наличии некоторых нечетких ограничений. Как он это делал, если методы решения таких задач начали разрабатываться во времена Лагранжа и Эйлера? Очевидно, у него был один метод решения: большой эмпирический опыт его самого и его учителей – предшественников. Действительно, это хорошо извест-

ный подход к практическому решению оптимизационных задач: время и мастерство делают свое дело. Недостаток такого подхода – в необходимости затраты значительного времени на экспериментальное решение задачи; однако для наших целей это не принципиально: ведь это время у гончаров было. По-видимому, нельзя сбрасывать со счетов и пристрастия той или иной гончарной школы. Однако очевидно, что большее влияние на формы грузовых амфор оказывали условия их эксплуатации, что уже обсуждалось. Таким образом, можно предположить, что в зависимости от этих шести условий и проходило формирование форм таких амфор, столетиями оттачивалось мастерство гончарных школ, их производивших. Эти рассуждения приводят к следующей гипотезе: формы грузовых амфор образуются по вполне определенным законам, то есть не являются случайными или просто прихотью того или иного мастера или его ученика. На их формирование оказывали влияние условия эксплуатации, особенности гончарных школ, то есть можно говорить о возможности определения времени, места изготовления амфоры, а также гончарной школы. Разумеется, сказанное имеет характер правдоподобной научной гипотезы и требует, как всегда, многочисленных подтверждений. Однако в археологии большинство утверждений с точки зрения математики являются правдоподобными гипотезами, которые выдвигаются специалистами и проверяются в течение многих лет многими исследователями.

Авторы данной работы провели исследования на большом количестве амфор, что вполне достаточно для выдвижения правдоподобной научной гипотезы об идентификации форм амфор.

Перейдем к постановке задачи. Рассматриваются формы внешних образующих корпусов амфор, которые классифицируются следующим образом: все рассмотренные образующие амфор описываются одним из степенных интерполяционных полиномов от первого до пятого порядка. Амфоры разбиваются на группы: I, II, III, IV, V; группы, в свою очередь, по величине полиномиальных коэффициентов, разбиваются на подгруппы: a, b, c, d, e, g, o, p, r, s, v, i, h. Таким образом, тип амфоры описывается двумя символами, например: Vd, IIb, IVp и т. д.

Форма образующей вычерчивается в масштабе, в котором длина амфоры принимается за единицу, то есть все остальные размеры относятся к ней; корпус амфоры ограничиваем двумя точками минимума, соответствующими переходу от ножки к корпусу и от корпуса к горловине амфоры. Ножки может и не быть, тогда за минимум принимаем точку, соответствующую левой границе области интегрирования.

К одному типу отнесем амфоры, внешние образующие которых в относительном масштабе совпадают в пределах погрешности, возникающей, например, при вычерчивании внешней границы корпуса сосуда в указанном масштабе, определении граничных точек минимума. Как показала вычислительная работа, эта погрешность составляет не более 5 процентов от длины корпуса. Откладывается погрешность по нормали к каждой точке внешней образующей сосуда. Разумеется, существует еще один тип погрешности – разброс, возникший в процессе работы гончара, который работал на гончарном круге, а не оттискивал сосуды в готовой форме. Учет такой

ошибки затруднителен, но, по-видимому, производство грузовых амфор было отлажено, так как изучение форм образующих показало, что амфоры хорошо подразделяются на указанные типы в пределах 5-процентной погрешности, и можно предположить, что эта ошибка лежит в указанных пределах.

Несколько слов об интерполяционных формулах, поскольку они хорошо известны вычислительной математике.

Постановка задачи интерполяции, как известно, формулируется следующим образом: восстановить вид интерполируемой функции, если известны ее значения $f(x_i)$ в точках x_i , $i = 0, 1, \dots, N$. При этом мы предполагаем, что интерполируемая функция $f(x)$, которую мы приближаем интерполяционным полиномом N -ой степени должна иметь $(N+1)$ -ю производную, что следует из вида остаточного члена полинома:

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_N),$$

где $f^{(N+1)}(\xi)$ - $(N+1)$ -я производная функции $f(x)$, x - аргумент нашей функции, x_i - точки интерполяции, точка ξ принадлежит отрезку интерполирования: $\xi \in [0,1]$, $x_i \in [0,1]$, $i = 0, 1, \dots, N$. Тем самым мы предъявляем определенные требования к гладкости функции, которая описывает внешнюю форму амфоры. Как показали расчеты, все внешние образующие исследуемых сосудов вполне удовлетворительно описывались полиномами порядка $1 \div 5$, то есть мы предполагали существование третьей ограниченной производной у $f(x)$ при интерполяции полиномом второй степени, четвертой - при интерполяции полиномом третьей степени, пятой - при интерполяции полиномом четвертой степени, шестой - при интерполяции полиномом пятой степени. Практически это условие выполнялось всегда при интерполяции полиномами до пятой степени включительно для исследованных амфор. Исследование полиномом более высоких степеней может привести к появлению лишних экстремумов в профилях образующих сосудов из-за предъявления больших требований к гладкости интерполируемой функции (наличие ограниченных производных до седьмого порядка и выше). Однако вычислительная практика показала, что использования интерполяционных полиномов с первой по пятую степень вполне достаточно для решения поставленной задачи.

Интерполяционный полином первой степени, записанный в форме Лагранжа, имеет вид:

$$P_1(x) = f(x_0) \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1) \frac{x-x_0}{x_1-x_0}.$$

Этот же полином можно представить в виде $P_1(x) = ax + b$, где

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$b = \frac{x_1 f(x_0) - x_0 f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Полином второй степени имеет вид:

$$P_2(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Этот полином также можно представить в виде

$P_2(x) = ax^2 + bx$, где коэффициенты a и b можно вычислить, например по формулам:

$$a = \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{2h}, \quad b = \frac{2x_2 \cdot f(x_1) - x_1 f(x_2) - x_0 f(x_1)}{2h^2},$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0.$$

Приведем также вид полинома третьей степени:

$$P_3(x) = f(x_0) \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + f(x_1) \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ f(x_2) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f(x_3) \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

который может быть представлен в виде $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, где

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2) + f(x_3) - f(x_0)}{2h^3},$$

$$b = \frac{4f(x_2) - 5f(x_1) + f(x_3) - 4f(x_0)}{2h^2},$$

$$c = \frac{6f(x_1) - 3f(x_2) + 2f(x_3) - 3f(x_0)}{2h},$$

$$h = x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - x_0.$$

Общая формула для интерполяционного полинома в форме Лагранжа имеет вид:

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{i=N} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{j=N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Перейдем к рассмотрению результатов интерполяционных приближений внешних образующих форм амфор.

На рис. 1–5 представлены графики внешних образующих исследуемых сосудов – соответственно I–V групп. Подгруппы обозначены на графиках. Здесь представлены усредненные формы образующих амфор, то есть формы, получившиеся усреднением по правилу среднего арифметического от координат нескольких сосудов. На рис. 1

представлены типы Id, Ie, Ig, Ir; на рис. 2 – Пб, Пс; на рис. 3 – Ша, Шв; на рис. 4 – IVc, IVσ, IVρ, IVh; на рис. 5 – Vi.

На рис. 1 показан результат интерполяционного приближения сосуда типа Id (сплошная) двумя полиномами первой степени (двумя отрезками прямых) вида (штриховые):

$$f(x) = ax + b,$$

где

$$a = \begin{cases} 0,35, & 0 \leq x \leq 0,82 \\ -1,1, & 0,82 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0,82 \\ 1,19, & 0,82 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что координаты пересечения двух прямых для всех типов исследуемых сосудов отличались не очень существенно: $x \approx 0,74 \div 0,86$, то есть не более 12 процентов от длины корпуса; углы полурастворов корпусов варьируются от $\arctg(0,35)$ до $\arctg(0,48)$.

Отметим, что такие формы сосудов наиболее удобны для переноски и при установке в песок на днище корабля. Однако они не оптимальны с точки зрения вместимости, то есть максимального объема для хранения содержимого (далеки от сферичной).

На рис. 7 представлены графики осредненной образующей (сплошная линия) и образующей, получившейся в результате интерполяции (штриховая линия). Видно вполне удовлетворительное совпадение. Заметим, что такая форма наиболее близка из всех рассмотренных к сферической и является наиболее оптимальной с точки зрения вместимости (наибольший объем при одинаковой площади поверхности имеет, как известно, сфера). Однако ручная транспортировка такого сосуда неудобна; кроме того, такая форма не является оптимальной при компактной упаковке многих сосудов, например, на днище корабля. Отсюда можно сделать выводы о назначении такого сосуда: по-видимому, он не был предназначен для частых и дальних перемещений. На рис. 8, 9 представлено аналогичное сопоставление для групп III и IV, то есть сосудов, внешние образующие которых наиболее хорошо описываются полиномами 3-го и 4-го порядков. Совпадение кривых хорошее. Для сосудов, образующие которых описываются полиномами 5-й степени (рис. 5), совпадение оказалось в пределах погрешности самого рисунка, что объясняется высокой степенью точности интерполяции полиномами 5-й степени. Заметим, что «двугорбые» профили сосудов удастся приближать полиномами степени не ниже четвертой.

Стоит также отметить, что толщина сосудов также выбиралась из экспериментального решения оптимизационной задачи. С одной стороны, стенка должна быть достаточно прочной, чтобы не разрушиться при случайном ударе, с другой – достаточно тонкой, чтобы сосуд был подъемным. Пористость сосуда также имела известный смысл: она обеспечивала его охлаждение за счет испарения находящейся в нем жидкости. Таким образом, проектирование амфоры представляет

собой многопараметрическую задачу условной оптимизации, которую древние гончары решали, разумеется, экспериментально.

Danilenko V. N. Interpolation approach for the amphora classification based on the study of their external form / V. N. Danilenko, I. B. Petrov // Scientific Notes of V. I. Vernadsky Crimean Federal University. – Series : Historical Science. – 2016. – Vol. 2 (68), No. 1. – P. 49–58.

The present work classifies amphoras with interpolation description of their outside forms. The use the interpolation polynomial in the Lagrange form is suggested to such a mathematical description. It was shown, that for an adequate description of the outside amphora forms we can use polynomial 2-nd, 3-nd, 4-th and 5-th degree. For amphora classification the polynomial coefficient and there degree are used. This type of classification allows to realize numerical amphora classification.

Keywords: mathematical modeling, archaeology, forms of amphora, interpolation.

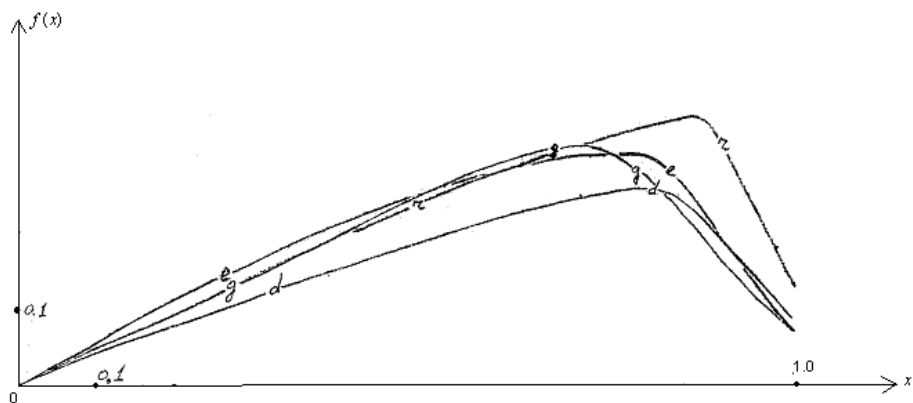


Рис. 1.

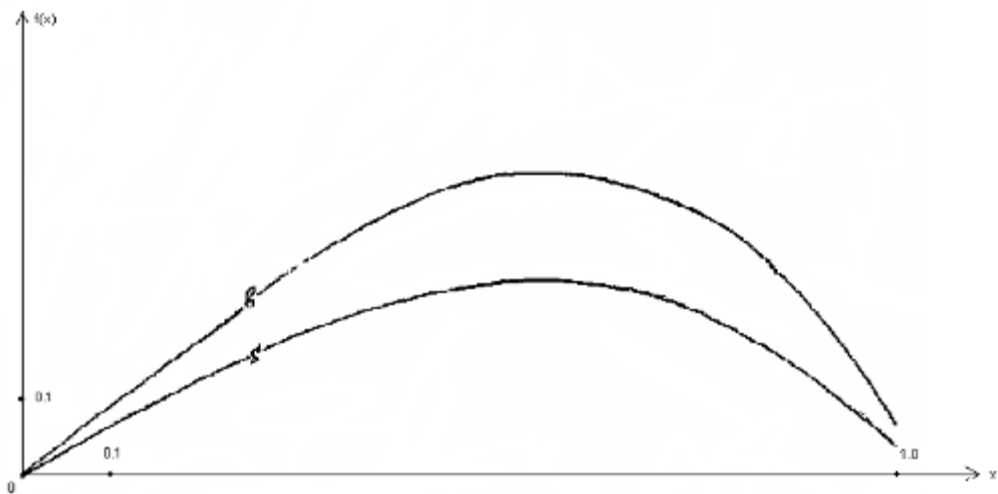


Рис. 2.

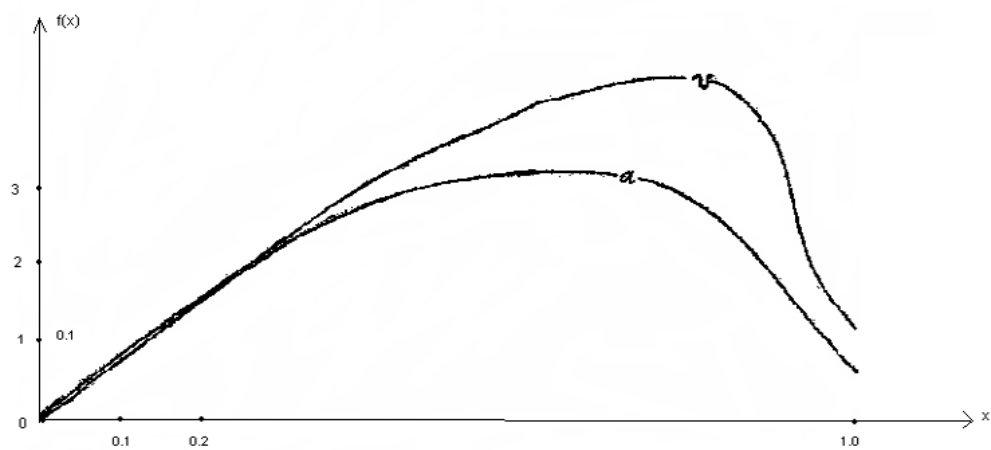


Рис. 3.

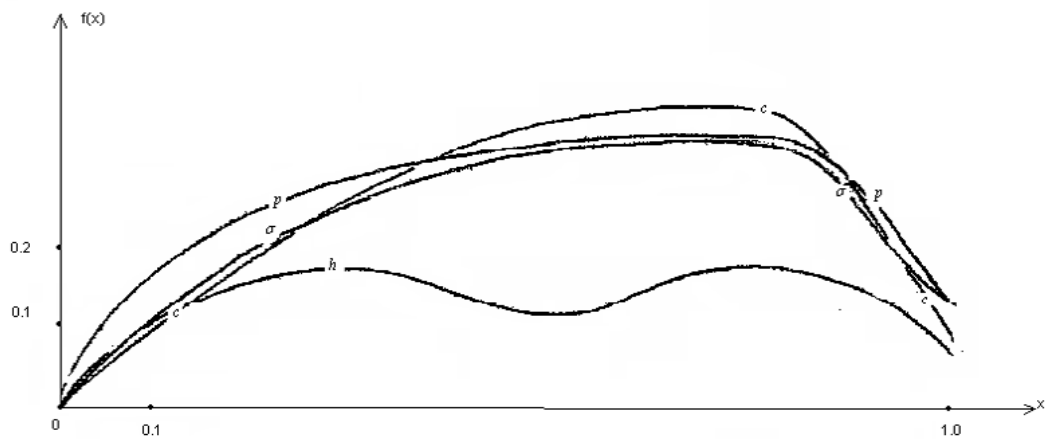


Рис. 4.

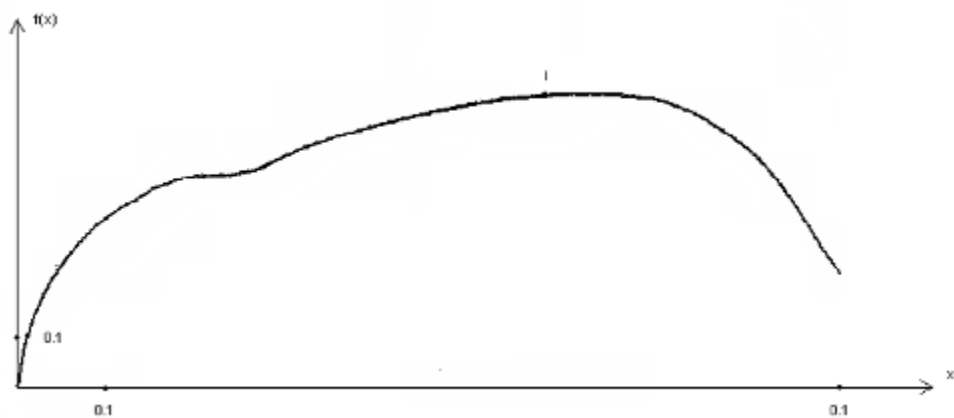


Рис. 5.

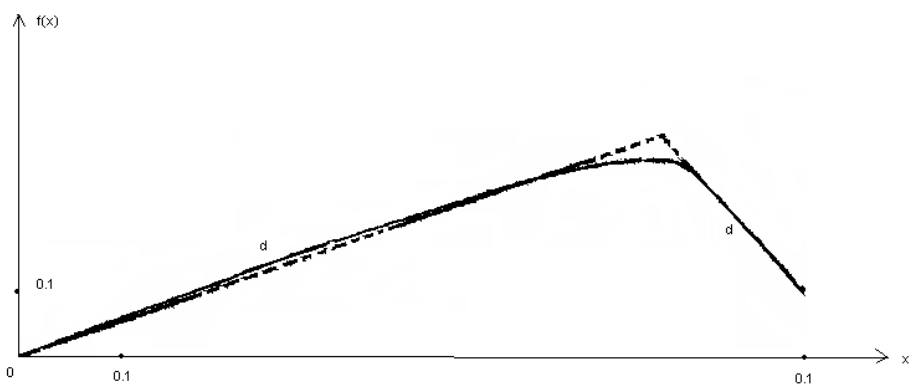


Рис. 6.

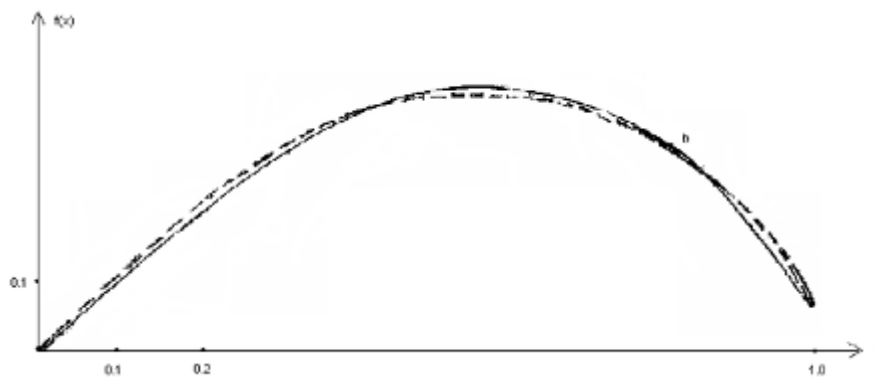


Рис. 7.

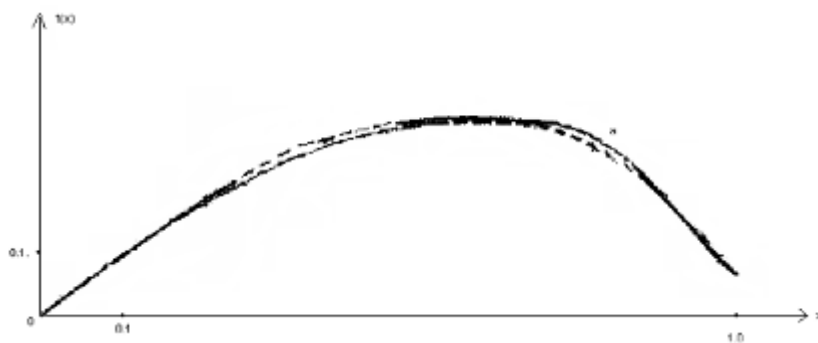


Рис. 8.

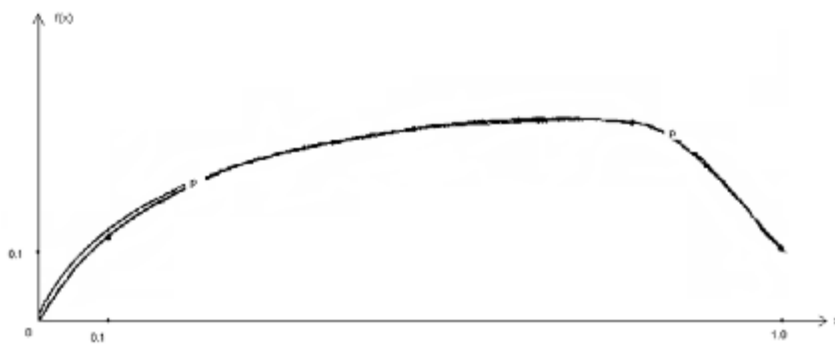


Рис. 9.